1 Esercizio dal compito del 14/06/2007

Si consideri un *server* di rete che riceve richieste di servizio da processi *client*, che arrivano con un ritmo rappresentabile mediante un processo di Poisson con parametro λ. Il servizio richiesto prevede l'esecuzione di due calcoli, fra di loro indipendenti, ciascuno dei quali ha una durata aleatoria rappresentabile mediante una v.a. ϑ , avente distribuzione esponenziale negativa con valore medio $\bar{\vartheta} = 2ms$. Il *server* dispone di due processori; pertanto in seguito ad ogni richiesta di servizio fa partire i due calcoli richiesti in parallelo ed il tempo di servizio ξ si considera terminato quando *ambedue* i calcoli sono terminati.

1. Determinare la distribuzione di probabilità $F_\xi(t)$ e la densità di probabilità $f_\xi(t)$ del tempo di servizio ξ ; (8 punti)

2. Determinare il valore medio ξ_M ed il momento del secondo ordine $M_{2\xi}$ della v.a. ξ; (7 punti)

3. Supponendo che per l'accesso al server si crei una coda locale di tipo *M/G/1*, determinare il massimo valore λ_{max} della frequenza degli arrivi, affinché il valore medio tempo complessivo per ottenere il servizio $\bar{\delta}$ non superi il valore $T_M = 10\,ms$. (7 punti)

Soluzione

La durata ϑ di ognuno dei due calcoli richiesti ha distribuzione di probabilità esponenziale negativa per cui si può scrivere

$$f_\vartheta(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove $\mu = 1/\bar{\vartheta} = 500\, pacch./s.$

La suddetta equazione può anche essere scritta

$$f_\vartheta(t) = \mu e^{-\mu t}\, u(t)$$

avendo indicato con $u(t)$ la funzione gradino unitaria definita da

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La relativa distribuzione di probabilità può essere scritta

$$F_\vartheta(t) = (1 - e^{-\mu t})\, u(t).$$

Da ora in poi per semplicità si ometterà di evidenziare il fattore $u(t)$, sottintendendo comunque che tutte le distribuzioni e densità di probabilità sono identicamente nulle per $t < 0$.

1. DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ DELLA V. A. ξ

   Sono possibili diverse linee di ragionamento. Qui di seguito ne riportiamo 2.

   - *Prima linea di ragionamento*

     I due processori che operano in parallelo finiscono i loro servizi dopo due tempi che indichiamo con ϑ_a e ϑ_b, aventi distribuzione di probabilità $F_a(t) = F_b(t) = F_\vartheta(t)$.

     Il tempo ξ é finito quando sono terminati *sia* ϑ_a *sia* ϑ_b; pertanto si ha

     $$F_\xi(t) = \text{prob}\{\xi \leq t\} = \text{prob}\{\vartheta_a \leq t\}\, and\, \text{prob}\{\vartheta_b \leq t\} =$$

     $$= F_a(t) \cdot F_b(t) = \left(1 - e^{-\mu t}\right)^2 = 1 - 2e^{-\mu t} + e^{-2\mu t}$$

     La densità di probabilità $f_\xi(t)$ si ottiene derivando la distribuzione $F_\xi(t)$ e pertanto

     $$f_\xi(t) = \frac{dF_\xi(t)}{dt} = 2\mu e^{-\mu t} - 2\mu e^{-2\mu t}$$

- *Seconda linea di ragionamento*

  Dal momento in cui i due processori hanno iniziato il loro servizio, il primo dei due finirà dopo un tempo che possiamo indicare con ϑ_1 e occorrerà ancora un altro tempo ϑ_2 perchè abbia finito anche il secondo servitore. Pertanto si ha

  $$\xi = \vartheta_1 + \vartheta_2$$

  La densità di probabilità $f_1(t)$ di ϑ_1 è quella relativa a *due* servitori esponenziali *in parallelo* e vale

  $$f_1(t) = 2\mu e^{-2\mu t},$$

  mentre la densità $f_2(t)$ di ϑ_2, per l'assenza di memoria vale

  $$f_2(t) = f_\vartheta(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

  La densità di probabilità di ξ può essere espressa come convoluzione delle due densità appena trovate e pertanto

  $$f_\xi(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx =$$

  $$= \int_0^t 2\mu e^{-2\mu x} \mu e^{-\mu(t-x)} dx = 2\mu^2 e^{-\mu t} \int_0^t e^{-\mu x} dx =$$
  $$= 2\mu e^{-\mu t} \left(1 - e^{-\mu t}\right) = 2\mu e^{-\mu t} - 2\mu e^{-2\mu t}$$

  che coincide con quella trovata con la prima linea di ragionamento.

  Integrando la densità di probabilità ora trovata si trova la distribuzione $F_\xi(t)$.

2. MOMENTI DELLA V.A. ξ.

   Ai fini di questi calcoli ricordiamo alcuni risultati ben noti riguardo alle distribuzioni esponenziali negative:

   $$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = 1 \quad \text{(Condizione di normalizzazione)}$$

   $$\int_0^\infty x \alpha e^{-\alpha x} dx = \bar{x} = 1/\alpha$$

   $$\int_0^\infty x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = E[x^2] = M_{2x} = 2/\alpha^2 = 2\bar{x}^2.$$

   Utilizzando questi risultati è facile per esempio verificare che la $f_\xi(t)$ prima trovata soddisfa alle condizioni di normalizzazione

   $$\int_0^\infty f_\xi(t) dt = 2\int_0^\infty \mu e^{-\mu t} dt - \int_0^\infty 2\mu e^{-2\mu t} dt = 2 - 1 = 1.$$

Per ottenere il momento del primo ordine si può scrivere

$$\xi_M = \int_0^\infty t f_\xi(t)dt = 2\int_0^\infty t\,\mu e^{-\mu t}dt - \int_0^\infty t\,2\mu e^{-2\mu t}dt =$$

$$= \frac{2}{\mu} - \frac{1}{(2\mu)} = \bar{\vartheta}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\bar{\vartheta} = 3\,ms.$$

Per quanto riguarda il momento del secondo ordine, si ha

$$M_{2\xi} = \int_0^\infty t^2 f_\xi(t)dt = 2\int_0^\infty t^2\,\mu e^{-\mu t}dt - \int_0^\infty t^2\,2\mu e^{-2\mu t}dt =$$

$$= 2\frac{2}{\mu^2} - \frac{2}{(2\mu)^2} = \bar{\vartheta}^2\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}\,\bar{\vartheta}^2 = 14(ms)^2 = 14\cdot 10^{-6}\,s^2$$

3. CALCOLO DI λ_{max}

   Nel *server* si crea una coda locale di tipo *M/G/1*, in cui il tempo di servizio è rappresentato dalla v.a. ξ . Applicando le formule per il tempo medio $\bar{\delta}$ speso nel sistema, relative ai sistemi di code *M/G/1* possiamo scrivere

$$\bar{\delta} = \bar{\xi}\; + \bar{\eta} = \xi_M + \bar{\zeta}\frac{\rho}{(1-\rho)},$$

   dove ζ rappresenta *tempo residuo* del tempo di servizio ξ, il cui valor medio vale

$$\bar{\zeta} = \frac{E[\xi^2]}{2\xi_M} = \frac{M_{2\xi}}{2\xi_M} = \frac{\frac{7}{2}\,\bar{\vartheta}^2}{2\frac{3}{2}\,\bar{\vartheta}} = \frac{7}{6}\,\bar{\vartheta} = 2.33\,ms.$$

   Imponendo che $\bar{\delta} \leq T_M$ si ottiene

$$\xi_M + \bar{\zeta}\frac{\rho}{(1-\rho)} \leq T_M = 10ms$$

   e pertanto

$$\frac{\rho}{(1-\rho)} \leq \frac{T_M - \xi_M}{\bar{\zeta}} = 3$$

   da cui si ricava

$$\rho \leq \frac{3}{4}.$$

   Dal momento che $\rho = \lambda\xi_M$ otteniamo

$$\lambda_{max}\,\xi_M = 0.75$$

   ed infine

$$\lambda_{max} = 250\,pacch./s.$$