Teletraffico LS - Compito del 10/07/2003

Un collegamento dati punto punto via radio utilizza un protocollo di linea di tipo stop-and-wait. Il trasmettitore invia una sola trama ed il ricevitore deve confermare l'avvenuta corretta ricezione, prima che la trama successiva possa essere inviata. In condizioni normali la conferma di ricezione (ACK) viene ricevuto dopo un tempo $T = 2.5$ ms. Qualora si verifichi un errore di trasmissione la trama viene ritrasmessa dopo un tempo $T_o = 3$ ms. Si ipotizzi di misurare T e T_o a partire dall'istante di inizio trasmissione della trama.

La probabilita' di errore per trama $P_F = 0.1$ sia indipendente da trama a trama, si chiede di:

1. scrivere l'espressione del tempo ϑ necessario per la corretta trasmissione di una trama in funzione del numero di errori di trasmissione e la relativa probabilita';

2. calcolare il tempo medio di trasmissione per trama $\bar{\vartheta}$.

Qualora il processo di arrivo delle trame al trasmettitore sia rappresentabile come processo di Poisson con frequenza media di arrivo pari a λ trame/sec, approssimando ϑ con una variabile aleatoria esponenziale con valor medio $\bar{\vartheta}$ e ipotizzando una coda di attesa di dimensioni infinite per le trame che trovano il trasmettitore occupato, si chiede di calcolare:

3. la massima frequenza di arrivo λ_M compatibile con la stabilita' del sistema;

4. il tempo medio di attesa in coda per le trame e il tempo medio totale necessario per trasmettere una trama qualora $\lambda = 0.8\lambda_M$, arrotondata alla decina;

5. la probabilita' che una trama impieghi piu' di 20 ms per essere trasmessa correttamente.

Per gli studenti della laurea specialistica del nuovo ordinamento

Rilasciata l'approssimazione di avere un tempo di servizio esponenziale e considerando l'effettiva distribuzione calcolata in precedenza, ricavare per sommi capi le formule che permettono di eseguire in modo esatto le valutazioni al precedente punto 4.

Nota Per la soluzione dell'esercizio puo' risultare utile le seguente sommatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad 0 \le x < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad 0 \le x < 1$$

Soluzione

Il tempo di trasmissione di una trama e' la somma di una serie di k trasmissioni errate seguite da una corretta, per cui:

$$\vartheta(k) = kT_o + T$$

poiche' la probabilita' di errore per trama e' indipendente da trama a trama risulta che la probabilita' di avere k errori seguiti da una trasmissione con successo vale

$$P_k = P_F^k(1 - P_F)$$

da cui risulta

$$\bar{\vartheta} = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta(k) P_k = T + T_o(1 - P_F) \sum_{k=0}^{\infty} k P_F^k = T + \frac{T_o P_F}{1 - P_F}$$

Per i valori numerici sudetti risulta

$$\bar{\vartheta} = 2.5 + \frac{3 \cdot 0.1}{0.9} = 2.834 \text{ ms}$$

Nell'ipotesi di tempo di servizio esponenziale il sistema puo' essere rappresentato come un sistema M/M/1 per cui, al fin di avere stabilita' deve essere garantita la disuguaglianza

$$\rho = \lambda \bar{\vartheta} < 1$$

da cui si deduce

$$\lambda_M < 352.9 \text{ trame/s}$$

Se $\lambda = 0.8\lambda_M \simeq 280$ trame/s risulta $\rho = 0.7934$ che possiamo approssimare a $\rho = 0.8$ (si noti che in questo modo tutte le valutazioni sono conservative). Il tempo medio di attesa in coda vale

$$\bar{\eta} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = 11.1 \text{ ms}$$

e ne consegue che il tempo medio di trasmissione di una trama e'

$$\bar{\delta} = \bar{\eta} + \bar{\vartheta} = 0.011 + 0.0028 = 14.9 \text{ ms}$$

La probabilita' che una trama richieda, per essere trasmessa piu' di 0.1 s si ricava come segue:

$$\Pr\{\delta > 0.1\} = e^{-(\mu - \lambda)0.02} = 0.23$$

Rilasciando l'approssimazione di durate esponenziali del servizio, il sistema a coda e' di tipo M/G/1 per cui per determinare il tempo medio in coda si utilizza la formula di Pollaczek/Khintchine:

$$\bar{\eta} = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma_\vartheta^2}{2\lambda(1 - \rho)}$$

$$\bar{\delta} = \bar{\eta} + \bar{\vartheta}$$

La varianza del tempo di servizio risulta

$$\sigma_\vartheta^2 = E[\vartheta^2] - \bar{\vartheta}^2$$

dato che

$$E[\vartheta^2] = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta(k)^2 P_k = \sum_{k=0}^{\infty} (T + kT_o)^2 P_F^k (1 - P_F)$$

$$(1 - P_F) \sum_{k=0}^{\infty} (T^2 + k^2 T_o^2 + 2kTT_o) P_F^k =$$

$$(1 - P_F) \left[\frac{T^2}{1 - P_F} + T_o^2 \frac{P_F(1 + P_F)}{(1 - P_F)^3} + \frac{2TT_oP_F}{(1 - P_F)^2} \right] = 9.134\,10^{-6} \text{ s}$$

si ottiene

$$\sigma_\vartheta^2 = 1.1\,10^{-6} \text{ s}$$

Per cui si ottiene

$$\bar{\eta} = 6.5 \text{ ms}$$

e quindi

$$\bar{\delta} = 6.5 + 2.83 = 9.33 \text{ ms}$$