

Esercizio 1

Si consideri un processo degli arrivi con tempo interarrivo avente una distribuzione esponenziale, con parametro λ .

1. Si scriva la densità di probabilità $f(t)$ e la distribuzione di probabilità $F(t)$ del tempo interarrivo.
2. Si immagini di osservare il processo in un generico istante $t=t_0$; si scrivano la $F(\tau)$ e la $f(\tau)$ del tempo τ che si deve attendere per avere un nuovo arrivo.
3. Si supponga di avere atteso un tempo τ_0 senza avere alcun arrivo, scrivere la $F(\delta)$ e la $f(\delta)$ del tempo δ che si deve attendere per avere un nuovo arrivo.
4. Si scrivano le medesime espressioni qualora il tempo interarrivo abbia una durata deterministica pari a $D=1/\lambda$.

Esercizio 2

Si consideri un moltiplicatore statistico a cui sono collegati 8 terminali che inviano mediamente 15 pacchetti/minuto ciascuno, secondo un processo di Poisson. La dimensione di ogni pacchetto è una variabile aleatoria distribuita esponenzialmente con valore medio $L=50$ byte. Supponendo una coda di attesa nel moltiplicatore di dimensioni infinite, si vuole che un pacchetto rimanga nel sistema meno di 1 secondo con probabilità $P \geq 0.95$.

1. Si determini qual è la minima velocità (espressa in bit/sec) per la linea di uscita tra le seguenti che deve essere adottata: (2400, 4800, 9600, 14400, 19200)
2. Mantenendo la velocità determinata, si calcoli la probabilità di blocco supponendo una memoria di dimensione pari a 10 pacchetti.

Esercizio 3

Si consideri un sistema a coda avente un'unica coda di attesa di lunghezza infinita. Nel sistema entrano due flussi di traffico (flusso 1 e flusso 2) composti da pacchetti di informazione di lunghezza casuale distribuita esponenzialmente. Siano $T_1=1/\mu_1=0.1$ sec e $T_2=1/\mu_2=0.08$ sec i tempi medi di servizio dei pacchetti appartenenti ai due flussi di traffico. Inoltre si supponga che gli arrivi siano distribuiti secondo due processi di Poisson di parametro $\lambda_1=6$ p/s ed $\lambda_2=10$ p/s. I pacchetti dei due flussi di traffico hanno accesso libero all'unica coda del sistema, che si compone anche di due servitori, S1 ed S2. Il servitore S1 serva solamente clienti di tipo 1 ed il servitore S2 solamente clienti di tipo 2 e si supponga una gestione di coda non FIFO, in cui un servitore libero (S1 o S2) sia in grado, quando libero di servire un pacchetto del tipo a lui pertinente, anche se questo è preceduto nella coda da pacchetto dell'altro tipo.

Determinare:

1. la probabilità che nel sistema siano presenti $n_1=4$ di tipo 1 ed $n_2=2$ clienti di tipo 2
2. la probabilità di avere complessivamente 5 clienti all'interno del sistema (ti tipo 1 o 2).

Esercizio 4

Si consideri un sistema a coda con 5 servitori tra loro indipendenti e tutti occupati all'istante t_0 . Supponendo che abbiano tutti una distribuzione dei tempi di servizio di tipo esponenziale negativo con valore medio $t=10$ minuti e che non vi siano ulteriori arrivi, si determini:

- 1) il tempo medio di servizio del primo cliente che esce;
- 2) il tempo medio di servizio dell'ultimo che esce;
- 3) la probabilità che dopo 10 minuti nessuno abbia ancora completato il servizio;
- 4) la probabilità che dopo 20 minuti tutti abbiano completato il servizio.
- 5) Facoltativa: Determinare la densità di probabilità del tempo di servizio dell'ultimo cliente che esce e verificare il risultato ottenuto al punto 2).

Esercizio 5

La Facoltà di Ingegneria ha 10000 studenti iscritti. Si supponga che ciascuno studente si rechi in segreteria, per richiedere un qualche tipo di servizio, 3 volte l'anno. Si supponga poi che ogni studente richieda un tempo di servizio casuale distribuito esponenzialmente con valore medio 6 minuti. Si supponga di trascurare i periodi transitori di apertura e chiusura, assumendo che gli sportelli lavorino a regime per un tempo di 3 ore al giorno.

Nell'ipotesi ottimistica che le richieste siano indipendenti e uniformemente distribuite in modo casuale nel corso dei 250 giorni lavorativi dell'anno stesso:

- 1) calcolare il numero minimo di sportelli necessario per avere un sistema che ammetta uno stato di equilibrio,
- 2) calcolare il numero di sportelli necessari al fine di avere un tempo medio di attesa in coda, qualora si trovi coda, inferiore a 10 minuti.
- 3) Ripetere il calcolo considerando che nel periodo di punta delle iscrizioni il traffico di studenti sia doppio del caso precedente.
- 4) Come mai la segreteria "è in grado di funzionare" anche con i soli 3 sportelli attuali?

Esercizio 6

Si supponga che l'Università di Bologna voglia organizzare un servizio di informazioni telefonico per gli studenti organizzato per Facoltà. In prima approssimazione si supponga che l'Università sia composta di 12 Facoltà di cui 6 "grandi", con 10000 studenti, e 6 "medie" con 6000 studenti.

Il servizio è attivo 5 ore al giorno e la durata delle chiamate è casuale con distribuzione esponenziale di durata media 3 minuti.

Nell'ipotesi ottimistica che le richieste siano indipendenti e uniformemente distribuite in modo casuale nel corso del periodo di apertura del servizio e che ciascuno studente telefoni alla segreteria per usufruire del servizio con probabilità del 50% nel mese d'iscrizione (composto di 25 giorni lavorativi).

Si supponga dapprima di avere un servizio separato per ciascuna Facoltà, si calcoli:

- 1) nel caso di sistema con chiamate bloccate cancellate, il numero minimo di impiegati necessari per garantire una probabilità di blocco inferiore al 5% ;
- 2) nell'ipotesi di sistema con attesa si ricalcoli il numero di impiegati per garantire un tempo di attesa in coda, per coloro che vanno in coda, inferiore a 2 minuti con probabilità del 95% ;

Si supponga poi di poter centralizzare il servizio a livello di Università :

- 3) si ricalcoli il numero di operatori necessari per un sistema con attesa, in grado di garantire la medesima qualità di servizio del punto (2).

Esercizio 7

Un professore riceve gli studenti per spiegazioni; le durate dei colloqui sono indipendenti una dall'altra ed hanno distribuzione esponenziale con media $\bar{\theta} = 15$ minuti .

Un giorno si presentano 3 studenti: uno all'istante t_1 di inizio del ricevimento (che prendiamo come origine dei tempi), uno dopo $t_2=10$ minuti e uno dopo $t_3=20$ minuti. Determinare:

- 1 la densità di probabilità $f_2(t)$ del tempo di uscita del secondo studente e la relativa distribuzione $F_2(t)$;
- 2 gli istanti medi $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$ di uscita dei 3 studenti.

NB Per la soluzione dell'esercizio si richiede di scrivere in modo completo e con qualche breve spiegazione le formule utilizzate.

Esercizio 8

Un professore riceve gli studenti per spiegazioni; le durate dei colloqui sono indipendenti una dall'altra ed hanno distribuzione esponenziale con media $\bar{\theta} = 10$ minuti .

Un giorno, in un certo istante, che prendiamo come origine dei tempi, arrivano tutti assieme 3 studenti e poi non si presenta più nessuno. Uno viene servito subito e gli altri 2 vanno in coda. Vengono poi ricevuti regolarmente in ordine casuale. Determinare:

1. gli istanti medi $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$ di uscita dei 3 studenti
la probabilità che il ricevimento sia finito dopo mezz'ora
2. la probabilità che il generico studente in coda abbia finito il ricevimento dopo mezz'ora.

Nota: per la soluzione si tenga presente il seguente integrale:

$$\int x^n e^{-\mu x} dx = e^{-\mu x} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} \frac{x^{n-i}}{(-\mu)^{i+1}} + C$$

Esercizio 9

Un fascio di giunzioni fra due centrali telefoniche è composto di $m=80$ canali. In seguito ad una ristrutturazione della rete il traffico offerto diviene $A_0=80$ Erlang. Il sistema è a perdita (chiamate bloccate cancellate) ; l'obiettivo di qualità è di mantenere il traffico perduto $A_p \leq 1$ Erlang in situazione operativa nominale, $A_{ps} \leq 4$ Erlang in presenza di una crescita straordinaria di traffico del 10%. Calcolare il numero x di canali da aggiungere nelle seguenti ipotesi di funzionamento :

1. gli x canali aggiuntivi sono indistinguibili dagli m preesistenti ;
2. gli x canali aggiuntivi formano un fascio di trabocco separato al quale viene offerto il traffico rifiutato da quello principale : in prima approssimazione si consideri tale traffico di tipo Poissoniano.

Confrontare i due dimensionamenti e giustificare le eventuali differenze.

Esercizio 10

Si consideri un collegamento via radio fra due calcolatori detti T ed R nel seguito. T invia dati a pacchetto ad R utilizzando $N=5$ canali radio a 1 Mbit/s in parallelo. L'accesso a ciascun canale avviene tramite una memoria di trasmissione per canale che si assume di dimensione illimitata. In R, i pacchetti ricevuti vengono tutti accodati in un'unica memoria, anch'essa illimitata, di ricezione ed elaborati uno alla volta in ordine di arrivo. Si assuma che i pacchetti abbiano lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valore medio 512 Byte e che T generi pacchetti secondo un processo di Poisson con valore medio $\lambda=100$ pacchetti/sec ed il canale sul quale trasmettere ciascun pacchetto venga scelto in modo casuale per pacchetto.

1. Si chiede di dimensionare la velocità di elaborazione del processore che in R elabora i pacchetti ricevuti (supponendo che il tempo di elaborazione sia proporzionale alla lunghezza) in modo tale da limitare il tempo medio totale di permanenza nell'intero sistema (compresi sia T sia R) ad un massimo di 5 msec.
2. Nelle condizioni di cui al punto precedente, si supponga di avere memoria di dimensioni finite in R e di volerla dimensionare in modo tale che la probabilità di perdere un pacchetto sia inferiore a 10^{-6} .

Esercizio 11

Un posto telefonico pubblico è dotato di m cabine. Il flusso di clienti in condizione di regime è di 80 persone/ora ; il tempo speso da ogni cliente ha distribuzione esponenziale con valore medio 6 minuti.

1. Ricavare la densità di probabilità del tempo di attesa in coda dei clienti

2. Determinare il numero m di cabine necessarie affinché il tempo medio di attesa, per chi fa attesa, sia minore di 5 minuti e la probabilità di fare una attesa maggiore di 10 minuti non superi il 5%.

Esercizio 12

Si consideri un caso di studio nel quale l'Università di Bologna decide di collegare fra loro due sedi per permettere l'interconnessione delle relative reti di calcolatori. Il traffico fra le due sedi è di due tipi; traffico dati di tipo scientifico, rappresentante la grande maggioranza del traffico totale, ed una piccola porzione di traffico amministrativo, avente particolari requisiti di velocità e qualità. L'entità stimata nei momenti di maggior traffico, sui quali si vuole dimensionare il collegamento, e le relative richieste di qualità per i due traffici sono:

- traffico scientifico: $\lambda_1=100$ pacchetti/s ; requisito $\bar{\delta} < 0.5$ sec
- traffico amministrativo: $\lambda_2=2$ pacchetti/s ; requisito : tempo speso in coda, dato che un pacchetto trovi coda, superiore a 0.5 sec con probabilità inferiore a 0.001.

I pacchetti si assumano di lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valore medio 1Kbyte. Il collegamento deve essere noleggiato da Telecom Italia, sotto forma di circuito dedicato numerico (o CDN), la cui capacità $C = nC_0$ viene resa disponibile al cliente quantizzata in multipli di $C_0 = 64$ Kbit/s. Il costo del noleggio è L. 6.000.000 annui per ogni C_0 ; il costo di un intero flusso a 2 Mbit/s è di L. 90.000.000 annui.

Dal punto di vista dell'architettura di sistema sono possibili due alternative:

- unire i due flussi di traffico su di un solo collegamento,
- separare i due flussi su due collegamenti in parallelo; in questo caso sono necessarie apparecchiature di interfaccia aggiuntive il cui costo è comparabile a quello di C_0 .

Si richiede di identificare quale soluzione sia la più vantaggiosa e di calcolare il grado di servizio risultante.

Esercizio 13

Un router collega una rete locale ad Internet per mezzo di due linee dedicate, una A con capacità $C_A = 2$ Mbit/s e l'altra B con capacità $C_B = 500$ kbit/s . Il traffico in ingresso al router è composto di pacchetti con lunghezza distribuita esponenzialmente con valore medio $L = 500$ byte e arrivi Poissoniani con frequenza $\lambda=500$ pacchetti/s. I router distribuisce in modo casuale i pacchetti, instradandoli con probabilità p sulla linea A e probabilità $(1-p)$ sulla linea B . Determinare :

1. i limiti di p che garantiscono un funzionamento stabile del sistema ;
2. il valore di p per cui risulta minimo il tempo medio δ necessario per l'instradamento del pacchetto ;
3. il valore di δ nel caso ottimo.

Esercizio 14

Si vuole dimensionare un moltiplicatore per segnali vocali digitalizzati, su di una linea di uscita a 2 Mbit/s. E' noto che, a causa delle naturali pause della conversazione il flusso di bit risultante per circuito non e' continuo, ma si compone di blocchi (o talkspurt) di dati seguiti da periodi di silenzio. Facendo riferimento al caso di canali vocali a 64 Kbit/s, si vuole valutare la eventuale convenienza di un sistema a moltiplicazione di pacchetto rispetto ad un tradizionale sistema a circuito di tipo PCM.

I talkspurt, ciascuno dei quali, nel caso a pacchetto, viene trasferito in un unico pacchetto con l'aggiunta di un 10% di intestazione, sono di lunghezza casuale, con distribuzione esponenziale e valore medio $\lambda = 22528$ bit. Inoltre essi vengono generati in modo approssimativamente Poissoniano, con tempo interarrivo $t = 1/\lambda = 1$ sec. Per quanto riguarda la qualità di servizio, nel

caso a commutazione di pacchetto si richiede che la probabilità di attendere 200 msec, condizionata al fatto di sperimentare attesa, sia inferiore al 5%.

Determinare :

1. il numero massimo di circuiti telefonici che è possibile moltiplicare sulla linea di uscita nel caso a commutazione di circuito PCM
2. il numero massimo di circuiti telefonici che è possibile moltiplicare sulla linea di uscita nel caso a commutazione di pacchetto
3. considerando che i pacchetti accodati, fra quelli che debbono attendere in coda, per più di 200 msec giungano al destinatario con un ritardo inaccettabile, per cui vengano scartati, valutare in prima approssimazione la percentuale di pacchetti scartati,
4. immaginando variabile il valore di λ , determinare quel valore per cui risultano eguali le due soluzioni (uguale numero di terminali supportati).

Esercizio 15

Si consideri un centralino risponditore per lo smistamento delle chiamate all'interno di un'azienda in grado di gestire una sola chiamata alla volta. Sia $\lambda = 2$ chiamate/min. la frequenza di arrivo delle chiamate e ciascuna richieda un tempo medio $\theta = 20$ sec. per essere smistata. Si valuti in prima istanza la percentuale di chiamate bloccate, nell'ipotesi che il risponditore sia rappresentabile come un sistema a chiamate bloccate cancellate

Si supponga poi di fornire il centralino di una funzione di messa in attesa delle chiamate che trovano occupato, tale da poter gestire fino ad L chiamate in attesa. Si richiede di :

1. ricavare le formule per il calcolo, nel caso generale, delle probabilità di stato di questo secondo sistema e della relativa probabilità di perdita ;
2. calcolare L in modo tale che la percentuale di chiamate perdute risulti inferiore al 10 % ;
3. calcolare, per le chiamate accettate nel sistema, il tempo medio (in secondi) necessario per l'instradamento, comprensivo di attesa e servizio (si consiglia di fare uso del risultato di Little riferito al numero di utenti presenti nel sistema).

Si eseguano poi i medesimi calcoli ipotizzando una frequenza di arrivo delle chiamate $\lambda = 3$ chiamate/min.

Esercizio 16

Si vuole studiare il comportamento di un commutatore ATM di dimensioni 4×2 . Il traffico sulle 4 linee di ingresso è di tipo bursty, per cui a blocchi di celle consecutive (di lunghezza fissa pari a 53 byte) si alternano periodi di silenzio. Si supponga che tutte le celle di un burst siano dirette alla medesima uscita e che i burst siano distribuiti uniformemente sulle uscite. I burst hanno lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valore medio $T=10$ celle. Come ipotesi semplificativa si immagini di poter descrivere il processo di arrivo dei burst come un processo di Poisson con frequenza λ (cioè si suppone istantaneo l'arrivo dell'intero burst). Infine si consideri che a ciascuna linea di uscita sia associata una coda di attesa di lunghezza infinita e che le linee di ingresso ed uscita dal commutatore abbiano capacità $C=155,52$ Mbit/s.

- 1) Si calcoli il massimo valore di λ accettabile al fine non avere instabilità.
- 2) Si calcoli il valore di λ per cui le ultime celle di ciascun burst abbiano probabilità inferiore al 5% di rimanere nel commutatore per più di 50 msec.
- 3) Con tale valore di λ , si calcoli il tempo medio per cella speso nel commutatore.

Esercizio 17

Si consideri un centralino aziendale con operatore avente il compito di smistare le chiamate ai vari dipendenti dell'azienda. Il tempo medio di servizio per chiamata entrante è $\theta_m = 15$ sec. Le chiamate

arrivano distribuite secondo un processo di Poisson con frequenza media di arrivo $\lambda=3.2$ chiamate al minuto.

- 1) Nell'ipotesi di sistema a chiamate bloccate cancellate si valuti la probabilità di rifiuto di una chiamata.
- 2) Qualora il sistema sia dotato della funzione di messa in attesa. delle chiamate ad operatore occupato, fino ad un massimo di L chiamate, si ricavi la formula della probabilità di rifiuto (dimostrare in circa mezza pagina la formula per il calcolo della probabilità di rifiuto) e si ricavi L tale che tale probabilità risulti pari al 5%.
- 3) In alcuni casi eccezionali il traffico aumenta fino a 4.8 chiamate al minuto. In queste condizioni si valuti nuovamente la probabilità di rifiuto per il sistema senza e con messa in attesa, con L pari al valore calcolato precedentemente.
- 4) Si discuta la convenienza aumentare ulteriormente il valore di L .

Esercizio 18

Si consideri un moltiplicatore statistico a pacchetto, composto da una coda di attesa di lunghezza finita pari ad L pacchetti, servita da due linee di trasmissione in parallelo aventi uguale capacità $C = 19200$ bit/s. Nell'ipotesi di pacchetti in arrivo secondo un processo di Poisson di frequenza $\lambda=45$ pacch./sec ed aventi lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valore medio 32 byte, si chiede di:

1. determinare la π_p nel caso privo di coda $L=0$
2. ricavare le formule per il calcolo delle probabilità di stato la formula per il calcolo della probabilità di perdita per pacchetto π_p , nel caso con $L>0$ generico,
3. calcolare il valore di L per cui $\pi_p \leq 10^{-4}$.

Esercizio 19

Un nodo a commutazione di pacchetto è collegato al resto del mondo tramite due linee, denominate nel seguito linea A e linea B, di capacità rispettivamente $c_A = 64$ kbit/s e $c_B = 128$ kbit/s ; il collegamento è gestito da un router che sceglie le due linee con la seguente regola : i pacchetti con lunghezza minore di un certo valore S vengono instradati verso la linea A e quelli di lunghezza maggiore di S verso la linea B. Supponiamo che i pacchetti arrivino con frequenza $\lambda = 25$ pacch./sec e che le loro lunghezze siano uniformemente distribuite fra $L_1 = 64$ byte ed $L_2 = 1528$ byte.

1. Determinare le frequenze di arrivo λ_A e λ_B sulle due linee ed i rispettivi tempi medi di servizio θ_A e θ_B in funzione di S .
2. Determinare S in modo da rendere minimo il tempo medio di servizio globale θ_m .
3. Supponendo il sistema sia privo di coda di attesa, determinare le probabilità di perdita sulle due linee Π_A e Π_B ed il numero totale B_P di bit perduti al secondo.
4. Discutere qualitativamente il criterio di scelta di S : si può considerare una scelta ottima ?

Esercizio 20

Una linea di trasmissione con capacità $C = 64$ kbit/s deve trasmettere pacchetti appartenenti ad un processo di Poisson con frequenza degli arrivi $\lambda = 8$ pacch./sec e durata con distribuzione esponenziale negativa di valore medio $L = 800$ byte. La coda è gestita da un router che memorizza i pacchetti in successione, in modo che il numero b di bit di memoria impegnati risulta in ogni istante pari alla somma delle lunghezze dei pacchetti accodati.

Determinare :

1. il numero medio A_c di pacchetti in coda e la lunghezza media b_M di memoria occupata ;
2. la densità di probabilità $f_{b/k}(b)$ della variabile b , condizionata alla presenza di k pacchetti nel sistema ;

3. la densità di probabilità globale della variabile b ;
4. la probabilità di avere la memoria impegnata per più di $B = 32 \text{ kbit}$ ($1 \text{ kbit} = 1024 \text{ bit}$).

Esercizio 21

Si consideri un collegamento via radio fra due calcolatori detti T ed R nel seguito. T invia dati a pacchetto ad R utilizzando $N=5$ canali radio in parallelo, scelti in modo casuale per pacchetto. L'accesso a ciascun canale avviene tramite una memoria di trasmissione per canale che si assume di dimensione illimitata. In R , i pacchetti ricevuti vengono tutti accodati in un'unica memoria di ricezione, anch'essa illimitata, ed elaborati uno alla volta in ordine di arrivo. Si assuma che i pacchetti abbiano lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valore medio $L=512$ byte e che T generi pacchetti secondo un processo di Poisson con valore medio $\lambda=100$ pacchetti/sec.

- 1) Dimensionare la velocità di trasmissione delle linee, C_T , in modo tale che per tempo medio di permanenza nel sistema T (coda+linea di trasmissione) valga $D_T \leq 0.1 \text{ sec}$.
- 2) Dimensionare la velocità di elaborazione, μ_R , del processore che in R elabora i pacchetti ricevuti (supponendo che il tempo di elaborazione sia proporzionale alla lunghezza) in modo tale che per il tempo medio di permanenza nell'intero sistema valga $D_S \leq 0.2 \text{ sec}$.
- 3) Scrivere le espressioni delle funzioni densità di probabilità $f_T(\delta_T)$, $f_R(\delta_R)$, $f_S(\delta_S)$, dei tempi δ_T di permanenza nel sistema T , δ_R di permanenza nel sistema R , e $\delta_S = \delta_T + \delta_R$ di permanenza nell'intero sistema. (A tal fine si ricordi che l'espressione della densità di probabilità del tempo di permanenza in un generico sistema M/M/1 può essere scritta : $f_{\delta}(\delta) = \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)\delta}$).
- 4) Calcolare le probabilità $P_T = \text{prob}[\delta_T \geq 0.5 \text{ sec}]$, $P_R = \text{prob}[\delta_R \geq 0.5 \text{ sec}]$, $P_S = \text{prob}[\delta_S \geq 1 \text{ sec}]$.

Esercizio 22

Si vuole progettare la rete telefonica di un'azienda, che si compone di due sedi, A e B, rispettivamente con $N_A=300$ impiegati nella sede A e $N_B=400$ impiegati nella sede B. Si intende installare un centralino per ogni sede, con eventuali collegamenti dedicati fra i due centralini. Misure di traffico mostrano che gli impiegati generano un flusso di traffico diretto al di fuori della struttura aziendale pari a $A_I=0.1$ Erlang/utente. Inoltre si misurano mediamente $\lambda_i=0.4$ chiamate/ora per impiegato dirette verso altri utenti della rete aziendale. Tutte le chiamate hanno durata media $\theta=3$ minuti.

1. Nel caso si decida di trasferire il traffico interaziendale solamente su linee di giunzione dedicate per il collegamento tra i due centralini si chiede di determinare:
 - m_A , numero di linee verso l'esterno per il centralino della sede A,
 - m_B , numero di linee verso l'esterno per il centralino della sede B,
 - m_g , numero di linee di giunzione fra i due centralini,
 al fine di garantire una probabilità di blocco di chiamata inferiore $\pi_p \leq 1 \%$.
1. Qualora si pensi invece di non utilizzare alcuna linea di giunzione fra i centralini, utilizzando la rete pubblica anche per il trasferimento delle chiamate interaziendali, si calcoli:
 - m_A , numero di linee verso l'esterno per il centralino della sede A,
 - m_B , numero di linee verso l'esterno per il centralino della sede B.
 al fine di garantire una probabilità di blocco di chiamata inferiore $\pi_p \leq 1 \%$.
1. Qualora valgano le seguenti tariffe:
 - $C_a=30000$ £/mese per il canone di abbonamento delle linee urbane verso l'esterno,
 - $C_g=150000$ £/mese per il canone di noleggio delle linee di giunzione fra centralini,
 - $C_t=250000$ £/Erlang/mese per il traffico di utenti (calcolato in termini medi),
 si valuti quale delle due soluzioni precedenti risulta conveniente in termini economici.
1. Infine si consideri la possibilità di ottimizzare il costo di gestione, tramite il noleggio di un numero limitato di linee di giunzione e l'uso della rete pubblica per il traffico di trabocco

interaziendale (supposto Poissiano). Determinare il numero ottimo di linee di giunzione m_g ed il costo relativo (si tenga presente che tale ottimo si colloca nell'intorno di un valore pari al traffico interaziendale totale).

Esercizio 23

Un'azienda vuole connettere la propria rete locale, che consta di 80 calcolatori collegati tramite una rete Ethernet, ad Internet. Il collegamento avviene tramite connessione ad un "Internet Service Provider" (ISP). Poiché si vuole un collegamento 24 ore su 24, l'azienda decide di noleggiare un circuito diretto numerico (CDN) da Telecom Italia. Inoltre è necessario un apparato di interconnessione (router) per il corretto instradamento verso l'ISP dei pacchetti diretti al di fuori della rete locale.

Si supponga che ciascun calcolatore della rete locale generi 0.2 pacchetti/sec diretti verso Internet e che la distribuzione temporale dei pacchetti sia descrivibile come processo di Poisson. Inoltre i pacchetti abbiano lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valor medio $L=500$ byte.

1. Poiché Telecom Italia fornisce i CDN con capacità multiple di $C_0 = 64$ Kbit/s si chiede di ricavare n tale che la capacità totale $C = n C_0$ del CDN garantisca che un pacchetto sperimenti una attesa in coda inferiore a $\eta_0=10$ msec con probabilità $P \geq 0.9$. Si ipotizzi a tal fine una singola coda di attesa nel router di dimensioni infinite.
2. Tenendo poi conto che la coda di attesa non può essere di dimensioni infinite in realtà, si ricavi quale deve essere la capacità della coda per garantire una probabilità di perdita $\pi_p \leq 10^{-4}$.
3. Infine si calcoli il costo totale della connessione per un periodo di 3 anni, tenendo conto che il costo del noleggio del CDN è pari a £ 6000000 annui e il router costa £ 10000000.

Esercizio 24

Si vuole progettare la rete telefonica di un'azienda, che si compone di tre sedi, denominate A, B e C. Si intende installare un centralino in ogni sede con eventuali collegamenti dedicati fra i centralini. Il traffico, sia quello fra le varie sedi e sia quello diretto al di fuori della struttura aziendale, è stato stimato a valle di una campagna di misura, in vista del progetto della rete. I valori ottenuti sono riassunti nelle due tabelle seguenti (tutti i valori in Erlang), nelle quali l'indice di colonna identifica la sorgente e quello di riga la destinazione

	A	B	C	Esterno
A		5	3	30
B	10		2	12
C	10	2		12
Esterno	30	12	12	

Si utilizzi la seguente simbologia:

- m_{AB}, m_{BC}, m_{AC} numero di giunzioni necessarie fra le tre sedi centralini,
- m_A, m_B, m_C numero di linee verso l'esterno per le sedi A, B e C.

Qualora si voglia garantire una probabilità di blocco di chiamata inferiore a $\pi_p \leq 1\%$, tenendo presente le seguenti tariffe:

- $C_a = 30000$ £/mese/linea canone di abbonamento alle linee urbane verso l'esterno
- $C_g = 150000$ £/mese/linea canone di noleggio delle linee di giunzione dedicate
- $C_t = 250000$ £/Erlang/mese costo del traffico di utenti sulle linee pubbliche (in termini medi)

1. Si vuole trasferire tutto il traffico interaziendale solamente su linee di giunzione dedicate.

2. Si vuole trasferire tutto il traffico interaziendale su linee di giunzione dedicate, con il vincolo di non collegare direttamente B e C, ma di usare il centralino di A come nodo di transito per le chiamate da B a C e viceversa.
3. Non si vogliono utilizzare linee dedicate, ma trasferire il traffico interaziendale sulla rete pubblica (N.B. le chiamate interaziendali impegnano una linea, in uscita, al centralino di partenza ed una linea, in ingresso, in quello di destinazione).

Soluzione

Riportare i valori calcolati nella tabella sottostante

	m_A	m_B	m_C	m_{AB}	m_{AC}	m_{BC}	Costo Tot.
Caso 1							
Caso 2							
Caso 3							

Esercizio 25

Si consideri un'azienda dislocata in più siti, ciascuno dei quali dotato di calcolatori collegati da una rete locale. Ciascuna rete locale è collegata alla sede principale tramite un router ed un collegamento diretto di velocità $C=128$ Kbit/s (1 Kbit/s = 1000 bit/s). In uno dei siti il traffico verso l'esterno della rete locale è stato fino ad oggi dovuto ad applicazioni CAD generanti un traffico, di tipo poissoniano, pari a $\lambda_0=3$ pac/sec, con requisito di qualità un ritardo in coda nel router (per coloro che fanno coda) inferiore a $\eta_0=0.5$ sec con probabilità superiore a $\pi_0=0.99$. A seguito di una nuova configurazione dei processi aziendale si rende necessario installare dei calcolatori per office automation generanti uno scambio di dati con la sede centrale stimabile in un traffico medio per calcolatore di $\lambda=1$ pac/sec. Per questi ultimi si richiede che il tempo medio speso nel router sia $\delta \leq 1$ sec. Tutti i pacchetti si assumano di lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valor medio $D=500$ byte.

1. Si consideri la coda di uscita dal router di dimensione infinita e condivisa da tutto il traffico secondo una politica FIFO. Si determini il numero massimo M di nuovi calcolatori che si possono installare.
2. Si valuti poi la possibilità di ripartire la capacità del canale di trasmissione in due flussi separati di capacità C_1 e C_2 , utilizzando nel router due code logiche separate. Dire se questa soluzione risulta conveniente o meno in termini di numero M di calcolatori collegabili.
3. Nelle ipotesi del caso 1. e con lo stesso valore di M , qualora la coda del router sia limitata a $L = 10$ pacchetti si valuti la probabilità di perdita per pacchetto π_p .

Esercizio 26

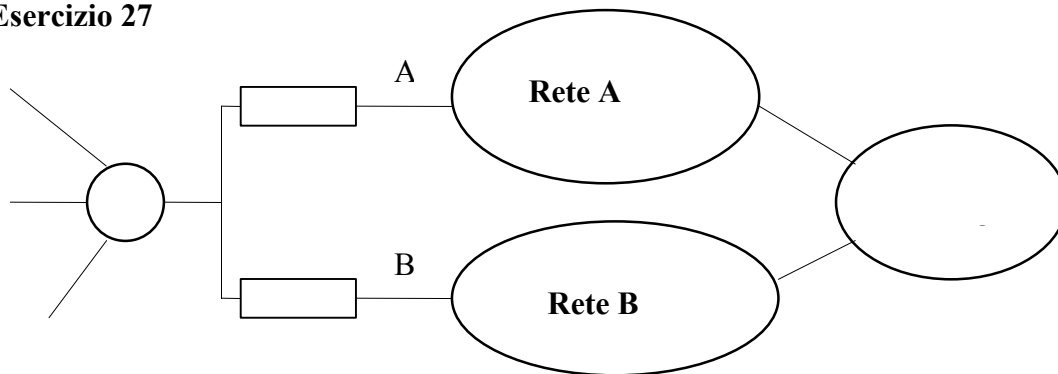
Si consideri un posto telefonico pubblico, all'interno della sala di aspetto di un aeroporto, in grado di fornire il servizio di telefonia in ambito internazionale ed intercontinentale. Per ragioni di gestione le cabine telefoniche sono abilitate ad uno solo dei due servizi. Sia m_1 il numero di cabine per il servizio internazionale ed m_2 il numero di cabine per quello intercontinentale. Le richieste di servizio (uso delle cabine) si suppongano aleatorie poissoniane, con frequenza media di arrivo al momento di apertura del servizio di $\lambda_1=60$ utenti/ora, $\lambda_2=30$ utenti/ora. Inoltre esse abbiamo una durata aleatoria esponenziale con valor medio $\bar{v} = 3$ min.

Si considera un tempo di vita del servizio di 4 anni e si prevede una crescita del traffico di tipo esponenziale fino a raggiungere al termine del periodo i seguenti valori: $\lambda_1=120$ e $\lambda_2=90$

1. Si pianifichi il numero di cabine da installare per garantire nel quadriennio un tempo medio di attesa in coda per coloro che fanno coda, inferiore a 2 min.
2. Qualora al termine del primo anno esista la possibilità di integrare il sistema in modo tale da avere tutte le cabine in grado di fornire entrambi i servizi, si ripianifichi il numero di cabine da installare nei restanti 3 anni, mantenendo il requisito di qualità di cui sopra.

Calcolare la probabilità che l'utente in attesa debba aspettare più di 5 minuti nelle condizioni di traffico della fine del 4° anno in ambedue i casi precedenti.

Esercizio 27



Nella rete rappresentata in figura il Router R gestisce flussi di traffico di pacchetti diretti alle reti A , B e C , servendosi di due linee A e B dotate di un sistema di coda di attesa illimitato e con eguale capacità $c = 2.048$ Mbit/s. I traffici verso A e B sono Poissoniani, ambedue con ritmo degli arrivi $\lambda = 200$ pacch./sec e lunghezza media $D = 1024$ byte. I pacchetti diretti a C possono essere instradati sia attraverso la linea A sia attraverso la linea B e costituiscono un traffico pure Poissoniano con ritmo degli arrivi $\lambda_C = 25$ pacch./sec e lunghezza media $D_C = 512$ byte. Supponiamo che il traffico diretto a C sia trascurabile ai fine del calcolo dello stato delle code sulle due linee.

- 1) Scrivere l'espressione delle probabilità di stato P_k delle due linee e calcolare la probabilità di blocco π_R , il tempo medio speso in coda η_m e il tempo medio complessivo speso nel sistema δ_m per i pacchetti diretti ad A e B .
- 2) Supponendo che il Router nell'instradare un pacchetto verso C scelga il sistema con meno pacchetti in coda (o scelga a caso se le due code sono eguali), determinare le probabilità Q_k che il suddetto pacchetto venga accodato in un sistema contenente già k pacchetti.
- 3) Calcolare la probabilità di blocco π_C , il tempo medio speso in coda η_C e il tempo medio complessivo speso nel sistema δ_C per i pacchetti diretti a C .

Esercizio 28

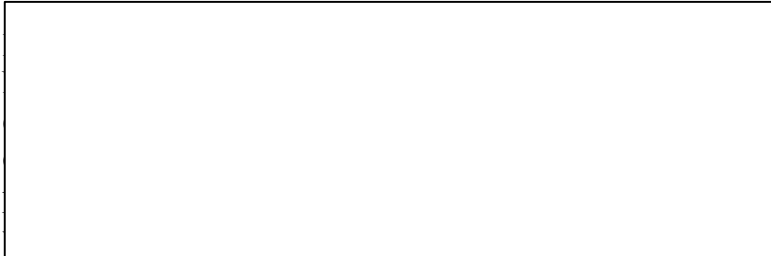
In una azienda manifatturiera un operatore riceve, mediante il centralino aziendale le chiamate di servizio dai vari reparti. Queste ultime si suddividono in comunicazioni urgenti ad alta priorità (tipo A) e comunicazioni ordinarie a bassa priorità (tipo B). Il centralino funziona come sistema a chiamate bloccate cancellate dove le chiamate ad alta priorità interrompono le chiamate a bassa priorità, ma ovviamente non si interrompono fra loro. Una chiamata si considera andata a buon fine qualora sia completata senza interruzioni.

La durata delle chiamate si suppone aleatoria esponenziale con parametro $\mu=2$ ch./min. uguale per A e B. Le chiamate arrivano secondo processi di Poisson; sia $\lambda_A=6$ ch./ora il ritmo di arrivo delle chiamate di tipo A e sia $\lambda_B=24$ ch./ora il ritmo di arrivo delle chiamate di tipo B.

Calcolare:

1. la probabilità π_A di blocco delle chiamate di tipo A;

2. la probabilità π_B che una chiamata di tipo B trovi l'operatore occupato (giustificare brevemente le formule utilizzate);
3. la probabilità P_s che una chiamata accettata di tipo B non venga interrotta;
4. la probabilità π_i che una chiamata di tipo B non vada a buon fine.



traffico di pacchetti diretti alle reti A, B in coda di attesa illimitato e con eguale intensità di arrivo, tutti Poissoniani, e sono costituiti da pacchetti di lunghezza media $D = 1024$ byte. I ritmi degli arrivi sono $\lambda_A = 10$ pacch./sec e $\lambda_C = 25$ pacch./sec. I pacchetti

diretti a C possono essere instradati sia attraverso la linea A sia attraverso la linea B e costituiscono un traffico pure Poissoniano che supponiamo trascurabile ai fini del calcolo dello stato delle code sulle due linee.

- 1) Scrivere l'espressione delle probabilità di stato P_{Ak} e P_{Bk} dei sistemi di code associati alle due linee e calcolare le probabilità di blocco π_A e π_B ed i tempi medi complessivi spesi nel router (coda+linea) δ_A e δ_B per i pacchetti diretti ad A e B .
- 2) Supponendo che il Router nell'instradare un pacchetto verso C scelga il sistema con meno pacchetti in coda o scelga il sistema B se le due code sono eguali, determinare le probabilità Q_k che il suddetto pacchetto venga accodato in un sistema contenente già k pacchetti.
- 3) Calcolare la probabilità di blocco π_C ed il tempo medio complessivo speso nel router δ_C per i pacchetti diretti a C .
- 4) Determinare la densità di probabilità $f_\delta(t)$ del tempo speso nel router dai pacchetti diretti a C e calcolare la probabilità P_δ che un pacchetto spenda nel Router più di 20 ms.

Esercizio 30

In una azienda manifatturiera un operatore riceve mediante un centralino le chiamate di servizio dai vari reparti. Queste si suddividono in comunicazioni urgenti ad alta priorità (tipo A) e comunicazioni ordinarie a bassa priorità (tipo B). Il centralino funziona come sistema a chiamate bloccate cancellate dove le chiamate ad alta priorità *interrompono* quelle a bassa (ma ovviamente non si interrompono fra loro). Una chiamata si considera andata a buon fine qualora sia completata senza interruzioni.

Le chiamate arrivano secondo processi di Poisson con ritmi di arrivo pari a $\lambda_A=6$ ch./ora per chiamate di tipo A e $\lambda_B=15$ ch./ora per quelle di tipo B. Le durate delle chiamate si suppongono aleatorie esponenziali con durate medie $\theta_A=12$ secondi e $\theta_B=1$ minuto.

Schematizzando il sistema come una catena di Markov tempo-continua disegnarne il diagramma a stati; scrivere il sistema per il calcolo delle probabilità di stato e calcolare le probabilità di stato all'equilibrio.

Utilizzando queste ultime calcolare:

1. la probabilità π_A di blocco delle chiamate di tipo A;
2. la probabilità π_B che una chiamata di tipo B trovi l'operatore occupato;
3. la probabilità P_s che una chiamata accettata di tipo B non venga interrotta;
4. la probabilità π_i che una chiamata di tipo B non vada a buon fine.

Esercizio 31

In una azienda manifatturiera un centralino smista tramite $m = 2$ operatori le chiamate di servizio da vari reparti. Il centralino funziona come sistema a chiamate bloccate cancellate. Le chiamate

arrivano secondo un processo di Poisson con ritmo di arrivo pari a $\lambda = 40$ ch./ora; le durate delle chiamate si suppongono aleatorie esponenziali con durata media $\theta = 1.5$ minuti.

Al centralino arrivano anche segnalazioni di Allarme ad alta priorità che trovando tutti gli operatori occupati *interrompono* una chiamata in corso (scelta a caso). Anche gli allarmi arrivano secondo un processo di Poisson con parametro $\lambda_A = 20$ ch./ora e durata molto breve che supporremo *trascurabile*.

Una chiamata di servizio si considera andata a buon fine qualora sia completata senza interruzioni.

1. Calcolare la probabilità di blocco π_p per il sistema in assenza di chiamate di allarme. Schematizzare il sistema come una catena di Markov tempo-continua e disegnarne il diagramma a stati ;
2. scrivere le equazioni per il calcolo delle probabilità di stato, calcolare le probabilità di stato all'equilibrio P_0, P_1 e P_2 , e la probabilità di rifiuto π_R .
3. Calcolare la probabilità π_i di insuccesso per una chiamata di servizio, tenendo conto del fatto che può non andare a buon fine sia perché viene rifiutata, sia perché viene interrotta. A tal fine si suggerisce di calcolare ritmo di chiamate interrotte λ_i (o numero medio di chiamate interrotte nell'unità di tempo) e di combinarlo opportunamente con il ritmo di chiamate rifiutate λ_R ed il ritmo degli arrivi.

Esercizio 32

Una rete locale, collegata ad Internet attraverso un router ed una linea dedicata con capacità $C = 64$ kbit/s, genera un traffico che supporremo Poissoniano con ritmo degli arrivi λ e pacchetti di durata media $D = 8000$ bit. La probabilità di errore per questo collegamento è trascurabile. A causa di un guasto nella rete di accesso si verificano sulla linea delle microinterruzioni, che non sono sufficienti a fare cadere il collegamento, ma corrompono l'eventuale pacchetto in corso di trasmissione; l'intervallo di tempo fra due interruzioni successive ha distribuzione esponenziale negativa con parametro $\lambda_i = 2$ eventi/s. A livello di linea viene adottato il protocollo Frame Relay, che esegue la rivelazione di errore ma non ha meccanismi per il suo recupero; l'errore viene pertanto rivelato dai livelli superiori (TCP), che provvedono alla ritrasmissione dei pacchetti corrotti con un ritardo che assumiamo pari a $T_R = 1$ s. In virtù del valore relativamente elevato di T_R il processo degli arrivi totale, formato dai pacchetti generati e da quelli ritrasmessi, può essere assunto ancora di tipo Poissoniano.

1. Esprimere il legame fra il ritmo degli arrivi totale λ_T e gli altri parametri e calcolare il valore λ_{max} che λ non deve superare affinché sia garantita la stabilità del sistema.
2. Calcolare la probabilità P_i di subire interruzione per un pacchetto in corso di trasmissione.
3. Assumendo $\lambda = 5$ pacch./s, calcolare il tempo medio T_s necessario a trasmettere un pacchetto con successo.

Esercizio 33

Consideriamo un'azienda formata da due stabilimenti dislocati all'interno di un'area metropolitana e cerchiamo di ottimizzare il collegamento telefonico fra di essi. A tal fine formuliamo le seguenti ipotesi. Gli stabilimenti sono dotati di moderni centralini ISDN ed hanno un numero di utenti rispettivamente $N_A = 500$ e $N_B = 700$. Ogni singolo utente lavora $n_h = 6$ ore al giorno per $n_g = 20$ giorni al mese; in un giorno di lavoro l'utente produce mediamente $\lambda_1 = 2$ chiamate dirette verso utenti dello stabilimento vicino, con distribuzione degli arrivi uniforme nell'arco delle 6 ore; la durata delle chiamate ha distribuzione esponenziale negativa con valore medio $\theta_M = 3$ minuti. Dal momento che gli stabilimenti appartengono alla stessa rete urbana, le chiamate fra di essi che utilizzano la rete pubblica sono tariffate calcolando gli scatti secondo la Tariffa Urbana a Tempo (TUT), che prevede uno scatto alla risposta e uno scatto ogni $\theta_s = 220$ secondi; il costo di ogni scatto è $C_s = 127$ lire. Un'alternativa possibile è l'affitto di giunzioni urbane a 64 kbit/s fra i due

stabilimenti, che hanno un canone di noleggio pari a $C_g = 640.000$ lire al mese. I centralini sono in grado di instradare le chiamate sulle giunzioni affittate, quando queste sono libere, e di usare la rete pubblica quando sono tutte occupate. Determinare:

- il traffico A_0 fra i due stabilimenti durante le ore lavorative;
- il numero medio n_s di scatti per chiamata;
- il costo mensile C_E per ogni Erlang di traffico smaltito attraverso la rete pubblica;
- il numero m_1 di giunzioni che conviene affittare per ottimizzare il costo di esercizio e la spesa mensile C_1 corrispondente (si considerino solo i costi dell'affitto delle giunzioni + quello degli scatti)
- supponendo che i centralini operino una compressione della voce riducendo la velocità del canale a 16 kbit/s, calcolare m_2 e C_2 analogamente al punto d).

Esercizio 34

Si consideri un'azienda formata da una Sede principale e da alcune piccole filiali. Il sistema informativo aziendale prevede reti locali nelle filiali collegate alla Sede mediante router e collegamenti in rete pubblica. Durante le ore di lavoro fra Sede e filiali avvengono delle *transazioni* per la consultazione di basi dati attraverso una Intranet e l'accesso a procedure amministrative. Supponiamo che l'orario di lavoro sia di $n_h = 6$ ore/giorno per $n_g = 20$ giorni/mese e che le transazioni generate da ogni filiale appartengano a processi di Poisson con frequenza degli arrivi $\lambda = 20$ trans./ora, e durata distribuita esponenzialmente con media $\theta_M = 1$ minuto.

Si vuole ottimizzare la rete di collegamento dati fra la sede e le filiali. Per questa si possono utilizzare giunzioni affittate, con un canone di noleggio C_g dipendente dalla distanza, oppure la rete commutata pubblica ISDN con tariffazione a scatti. Il numero di scatti per ogni chiamata è determinato come segue: in ogni centrale pubblica sono presenti dei contatori che emettono impulsi di tassazione secondo ritmi di conteggio θ_s dipendenti dalla distanza; quando l'utente chiama gli viene addebitato uno scatto alla risposta e poi uno scatto per ogni impulso di conteggio generato dal contatore opportuno. Dal momento che il contatore opera indipendentemente dall'arrivo delle chiamate "il primo impulso di conteggio dopo quello alla risposta è inviato al contatore d'abbonato in un momento qualunque del primo intervallo ciclico di tassazione" (art. 10 del D.M. 28/2/97). Il costo dello scatto vale $C_s = 127\text{£}$.

- Ricavare la formula per il calcolo del numero medio di scatti per transazione n_s .
- Confrontare i costi mensili delle seguenti 3 soluzioni:
 - giunzione affittata,
 - il router usa una linea commutata ISDN che viene impegnata all'inizio della giornata e resta occupata per tutte le 6 ore lavorative,
 - il router usa un pool accessi ISDN, impegnando una linea ogni volta che inizia una transazione e la rilasciandola a transazione finita (il tempo di set-up di per la rete ISDN è di circa 3 secondi e può essere considerato trascurabile),per una filiale appartenete alla stessa rete urbana della Sede, per la quale il canone di noleggio vale $C_g = 640.000$ £/mese e il ritmo di conteggio è $\theta_s = 220$ s. Ripetere il calcolo per una filiale distante $D = 30$ Km, per la quale il canone di noleggio vale $C_g = 1.090.000$ £/mese e il ritmo di tassazione è $\theta_s = 40$ s.

Esercizio 35

Due reti locali geograficamente separate sono collegate mediante due router ed una linea full-duplex con capacità $C = 64$ kbit/s in ambedue le direzioni. Il traffico generato dalle reti locali è simmetrico e può essere schematizzato come un processo di Poisson, con frequenza degli arrivi $\lambda = 15$ pacch./s e lunghezza dei pacchetti esponenziale negativa con durata media $D = 400$ byte. Due calcolatori posti uno su una rete ed uno sull'altra eseguono delle *transazioni* che comportano la trasmissione di un pacchetto da parte di uno dei due e l'immediata risposta da parte dell'altro. Si vuole studiare la

durata ζ delle transazioni, considerando che queste iniziano quando il primo calcolatore comincia a trasmettere il pacchetto e terminano quando è completamente arrivato il pacchetto di risposta. Supponiamo trascurabili i tempi di elaborazione da parte dei calcolatori e quelli di attraversamento delle reti locali.

- (a) Ricavare la densità di probabilità $f_\eta(t)$ del tempo η speso nella coda del router dal generico pacchetto e quella $f_\delta(t)$ del tempo δ totale speso per una trasmissione.
- (b) Ricavare la densità di probabilità $f_\zeta(t)$ della durata ζ di una transazione.
- (c) Ricavare la distribuzione di probabilità $F_\zeta(t)$ della variabile aleatoria ζ .
- (d) Determinare la durata media T_M di una transazione ed il tempo T_5 che viene superato dalle transazioni con probabilità $p \leq 5\%$.

Esercizio 36

Una linea di trasmissione di capacità $C = 2.048$ Mbit/s deve trasmettere pacchetti di lunghezza esponenziale con valore medio $D = 6400$ bit. I pacchetti provengono da N sorgenti con caratteristiche omogenee. La frequenza media d'arrivo dei pacchetti per sorgente è pari a $\lambda_i = 30$ pacch./sec ed il processo degli arrivi complessivo si può considerare in prima approssimazione di Poisson. L'accesso al trasmettitore è regolato come un sistema a coda con scheduling FIFO. Sia b il numero complessivo di bit nella memoria di trasmissione in un certo istante. Si calcoli:

- (a) l'espressione $P_k(N)$ della probabilità di avere k pacchetti nel sistema a coda, in funzione di N ;
- (b) la densità di probabilità $f_{b/k}(t)$ della variabile b condizionata alla presenza di k pacchetti nel sistema;
- (c) la densità di probabilità $f_b(t)$ globale della quantità di memoria occupata;
- (d) il numero massimo di sorgenti, N_M tali che $\text{Prob}\{b \geq 32 \text{ Kbit}\} \leq 0.01$.

Esercizio 37

Si consideri un multiplatore statistico a pacchetto, dotato di una coda di attesa di lunghezza *finita* pari ad L pacchetti, servita da due linee di trasmissione in parallelo aventi uguale capacità pari a $C = 64$ kbit/s. Si supponga il processo degli arrivi di Poisson con frequenza $\lambda = 20$ pacch./s e lunghezza con distribuzione esponenziale con valore medio $D = 400$ byte.

- a) Ricavare le formule per il calcolo delle probabilità di stato all'equilibrio P_k del sistema, per un valore di L generico.
- b) Supponendo che per contenere il ritardo dei pacchetti la dimensione della coda sia limitata a $L = 3$, determinare la probabilità di perdita per pacchetto π_p .
- c) Determinare il tempo medio δ_M di permanenza nel sistema per i pacchetti *accettati*.

Esercizio 38

Un'azienda fornisce informazioni ai suoi clienti tramite un centralino con operatore. Il processo delle chiamate è di tipo poissoniano con frequenza degli arrivi $\lambda = 30$ chiamate/ora e durata media delle occupazioni $\theta_m = 2$ minuti. I clienti che trovano l'operatore occupato ricevono un avviso e vengono messi in attesa con l'invio di un brano musicale. Mano a mano l'operatore si libera, i clienti in coda vengono serviti con una disciplina FIFO. Si supponga ora che i clienti siano disposti ad aspettare il loro turno solo per un tempo ζ , trascorso il quale riagganciano abbandonando la coda. Si assuma che, stante l'assenza di informazioni sulla durata dell'attesa, il tempo ζ sia una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale negativa a valore medio $\zeta_a = 2$ minuti.

- Rappresentare il sistema come un processo di nascita e morte, disegnare il diagramma degli stati che lo rappresenta e calcolarne le probabilità di stato all'equilibrio P_k ;
- calcolare il numero medio A di utenti nel sistema e il numero medio A_c di utenti in coda;
- calcolare la probabilità di blocco π_B , il throughput del sistema A_s e la probabilità di perdita π_p per il generico utente;
- supponendo che un cliente chiami quando il sistema contiene già $k = 4$ altri utenti e che decida di non riattaccare fino a che non è stato servito, calcolare il tempo medio $\delta_{s/4}$ che dovrà passare nel sistema.

Esercizio 39

Un calcolatore di processo riceve dati da elaborare da un numero elevato di sensori e trasduttori collegati tramite una rete locale. Si assuma di poter schematizzare l'insieme delle richieste di calcolo come un processo di Poisson con parametro $\lambda = 4$ richieste/sec; la durata delle elaborazioni ha distribuzione esponenziale negativa con valore medio $\theta_M = 0.2$ secondi. Consideriamo ora un sensore remoto collegato attraverso un sistema di trasmissione, che trasmette i dati al calcolatore a intervalli regolari, pari a $T_0 = 1$ secondo (il tempo di trasmissione è trascurabile). Pertanto un evento rilevato dal sensore deve attendere innanzitutto un tempo aleatorio δ_1 prima di essere trasmesso e poi un tempo δ_2 , comprensivo di attesa in coda e di elaborazione, per essere elaborato dal calcolatore. Chiamiamo $\zeta = \delta_1 + \delta_2$ la variabile aleatoria che rappresenta il ritardo totale. Determinare:

- Le distribuzioni di probabilità $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ di δ_1 e δ_2 ;
- Il valore medio di ζ_M della v.a. ζ ;
- La densità di probabilità $f_\zeta(t)$ di ζ ;
- La distribuzione di probabilità $F_\zeta(t)$ di ζ ;
- Il tempo T_1 che viene superato da ζ con probabilità $P \leq 1\%$.

Esercizio 40

Un'azienda si compone di due stabilimenti all'interno della stessa area metropolitana. Ciascuno stabilimento è dotato di un moderno centralino ISDN e i due centralini sono connessi con due linee a 64 Kbit/s. I centralini sono dotati di un sistema di compressione della voce a 16 Kbit/s, capace di allocare 4 canali vocali per ogni linea a 64 Kbit/s. Per la gestione delle comunicazioni è però necessario un canale comune di segnalazione, anch'esso a 16 Kbit/s, capace di gestire fino a 7 canali vocali. Supponiamo che in pratica il sistema funzioni nel seguente modo: in assenza di chiamate non c'è collegamento fra i centralini; in presenza di una chiamata vocale i centralini impegnano una prima linea a 64 Kbit/s sulla quale aprono il canale di segnalazione e poi un canale vocale (entrambi a 16 kbit/s); se ora arrivano altre chiamate vengono aperti altri canali vocali sulla stessa linea, usando sempre lo stesso canale di segnalazione; quando il numero di chiamate contemporanee diventa maggiore di 3, viene impegnata una seconda linea a 64 Kbit/s che può portare fino a 4 canali vocali; i centralini possono reinstradare le chiamate, trasferendole dalla seconda linea alla prima quando su questa si libera un canale vocale, senza degradare il servizio (funzione call packing).

a) Si calcoli innanzitutto il massimo valore di traffico A_0 fra centralini compatibile con un grado di perdita $\pi_p \leq 0.01$.

b) Per il valore di A_0 calcolato al punto a), si valutino i costi delle seguenti soluzioni architetture, identificando la più conveniente.

- le linee a 64 Kbit/s siano canali di un accesso base ISDN commutati (costo C_1);
- la prima linea a 64 Kbit/s sia un CDN affittato mentre la seconda sia un collegamento ISDN commutato (costo C_2).
- le linee siano entrambi CDN affittati (costo C_3)

Il canone di affitto delle giunzioni è $C_M = 320.000$ £/mese ciascuna. Per valutare il costo del traffico sulla rete commutata supponiamo che la tariffazione delle chiamate sia strettamente *a tempo*, senza scatti alla chiamata, con un costo per secondo pari a $c = 1$ £/s, e che il traffico sia praticamente pari al valore massimo nelle ore lavorative (numero ore lavorative $n_h = 150$ ore/mese) e nullo al di fuori.

Ai fini del calcolo di C_1 e C_2 si suggerisce di calcolare:

- a) le probabilità p_k di avere k chiamate contemporanee nel sistema
- b) i tempi T_1 e T_2 , in secondi al mese, in cui sono attive la prima linea e la seconda

Esercizio 41

Un'azienda fornisce informazioni ai suoi clienti tramite un centralino con 2 operatori. Il processo delle chiamate è di tipo poissoniano con frequenza degli arrivi $\lambda = 45$ chiamate/ora e durata media delle occupazioni $\theta_m = 2$ minuti. I clienti che trovano ambedue gli operatori occupati ricevono un avviso e vengono messi in attesa con l'invio di un brano musicale; i clienti in coda vengono poi serviti con una disciplina FIFO. Si supponga ora che i clienti siano disposti ad aspettare il loro turno solo per un tempo ζ , trascorso il quale riagganciano abbandonando la coda. Si assuma che, stante l'assenza di informazioni sulla durata dell'attesa, il tempo ζ sia una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale negativa a valore medio $\zeta_a = 2$ minuti.

- a) Rappresentare il sistema come un processo di nascita e morte, disegnare il diagramma degli stati che lo rappresenta e calcolarne le probabilità di stato all'equilibrio P_k ;
- b) calcolare il numero medio A di utenti nel sistema e il numero medio A_c di utenti in coda;
- c) calcolare la probabilità di blocco π_B , il throughput del sistema A_s e la probabilità di perdita π_p per il generico utente;
- d) supponendo che un cliente chiami quando il sistema contiene già $k = 4$ altri utenti e che decida di non riattaccare fino a che non è stato servito, calcolare il tempo medio $\delta_{s/4}$ che dovrà passare nel sistema.

Esercizio 42

Si vuole progettare la rete telefonica di un'azienda, avente quattro sedi, denominate 1, 2 3 e 4, localizzate all'interno della medesima area urbana. Si intende installare un centralino in ogni sede con collegamenti fra i centralini realizzati tramite fasci di circuiti dedicati noleggiati dal gestore. Il traffico fra le varie sedi è stato stimato a valle di una campagna di misura e riassunto nella tabella seguente (valori in Erlang, l'indice di riga identifica la sorgente e quello di colonna la destinazione).

S\D	1	2	3	4
1	X	4	4	3
2	5	X	2	1
3	5	2	X	2
4	4	1	2	X

Si calcoli il numero totale di circuiti dedicati da noleggiare, evidenziando la soluzione più conveniente, nel caso di:

- una topologia a maglia completa, in cui ciascuna sede sia collegata a tutte le altre, garantendo una probabilità di perdita per tutte le chiamate $\pi_p \leq 1\%$;
- una topologia a stella in cui tre sedi siano collegate solamente con la quarta che funge perciò da centro stella; in questo caso è ovviamente necessario che il centro stella operi da ponte per il traffico fra sedi non direttamente connesse. In prima approssimazione, si considerino Poissoniani e indipendenti i flussi di traffico fra le varie sedi e si consideri sufficiente per un corretto dimensionamento imporre che $\pi_p \leq 1\%$ su ciascun fascio di circuiti.

Discutere brevemente vantaggi e svantaggi delle due topologie indipendentemente dal numero di circuiti richiesti.

Esercizio 43

Un'azienda si compone di due stabilimenti all'interno della stessa area metropolitana. Ciascuno stabilimento è dotato di un moderno centralino ISDN che può essere dotato di un certo numero di apparati di compressione della voce, capaci di allocare 3 canali vocali più uno di segnalazione per ogni linea. In questo caso quando si presenta una chiamata viene attivata una linea a 64 kbit/s, su cui transitano la chiamata ed il canale di segnalazione; su questa linea sono disponibili altri due canali per altrettante chiamate contemporanee. Quando si presenta la quarta chiamata contemporanea viene attivata una seconda linea a 64 kbit/s e così via fino all'esaurimento dei sistemi di compressione. Le chiamate che superano la capacità delle linee con compressione vengono instradate sulla rete pubblica nel modo normale occupando una intera linea a 64 kbit/s. I centralini sono poi dotati della cosiddetta funzione *call packing* che permette di reinstradare le chiamate in corso, trasferendole da una qualunque linea a quella di prima scelta quando su questa si libera un canale vocale, senza degradare il servizio.

Si supponga che il traffico fra i due stabilimenti sia pari ad $A_0 = 3$ Erlang. Si supponga inoltre che la tariffazione delle chiamate sia strettamente *a tempo*, senza scatti alla chiamata, con un costo per secondo pari a $c = 1$ £/s, e che il traffico sia praticamente pari al valore massimo nelle ore lavorative (numero ore lavorative $n_h = 150$ ore/mese) e nullo al di fuori. Si supponga infine che il costo degli apparati di compressione per una linea sia equivalente a £ 1.400.000 per ogni anno di vita economica dei centralini.

- a) Si calcoli innanzi tutto il costo di esercizio mensile C_0 in assenza di apparati di compressione.
- b) Nel caso di una sola linea equipaggiata col sistema di compressione si calcoli il traffico A_{s1} smaltito da questa linea e quello A_{t1} che trabocca sulla rete pubblica
- c) Calcolare analogamente A_{s2} , A_{t2} e A_{s3} , A_{t3} nell'ipotesi di 2 e 3 linee equipaggiate con apparati di compressione
(per rispondere alle domande b) e c) si suggerisce di calcolare le probabilità p_k di avere contemporaneamente k chiamate in corso)
- d) Individuare la soluzione più economica calcolandone il costo di esercizio mensile C_M

Esercizio 44

Si consideri un multiplatore statistico a pacchetto, composto da una coda di attesa di lunghezza finita pari ad L pacchetti, servita da *tre* linee di trasmissione in parallelo aventi uguale capacità pari a 64 Kbit/s. Nell'ipotesi di pacchetti in arrivo secondo un processo di Poisson di frequenza $\lambda = 90$ pacch./sec ed aventi lunghezza casuale con distribuzione esponenziale e valore medio 256 byte, si chiede di:

1. determinare la π_p nel caso privo di coda $L = 0$
2. ricavare le formule per il calcolo delle probabilità di stato la formula per il calcolo della probabilità di perdita per pacchetto π_p , nel caso con $L > 0$ generico,
3. calcolare il valore di L per cui $\pi_p \leq 0.01$.

Esercizio 45

Un'azienda ha $N=100$ dipendenti che sono dotati di telefono cellulare aziendale. A seguito di una analisi del traffico generato da questi dipendenti si sa che le chiamate hanno distribuzione di Poisson con frequenza media di $\lambda = 4$ ch/giorno per dipendente e durata approssimativamente esponenziale con valore medio $\theta = 30$ sec. L'amministrazione dell'azienda ha identificato la tipologia di contratto più conveniente per i cellulari dei dipendenti e deve scegliere se sottoscrivere la formula abbonamento o ricaricabile, tariffate come segue:

- abbonamento: costo fisso di £ 25000 mensili e addebito per chiamata con scatto alla risposta di £ 240 seguite da una tariffazione al secondo pari a 7.9 £/sec
- ricaricabile: costo fisso di £ 25000 per ricarica (per semplicità si assuma che la ricarica sia di importo pari a £ 100000) e addebito per chiamata con tariffazione a scatti al costo di £ 200 a scatto; uno scatto alla risposta, uno scatto dopo i primi 3 sec di conversazione e quindi uno scatto ogni $\theta_s = 25.3$ sec.

Si chiede di calcolare:

1. C_1 , il costo medio per chiamata nel caso di abbonamento;
2. C_2 , il costo medio per chiamata nel caso di carta ricaricabile;
3. il costo totale mensile (un mese è composto mediamente da 20 giornate lavorative) in caso di abbonamento (C_a) ed in caso di ricaricabile (C_r), identificando la soluzione più conveniente.

Infine si verifichi se il risultato trovato rimane valido anche qualora la durata media delle chiamate sia pari a $\theta = 2$ min.

Esercizio 46

Un'azienda si compone di due sedi; ciascuna sede dotata di un centralino per la gestione delle chiamate telefoniche. Il traffico telefonico in uscita da ciascuna sede è stimato come segue:

- o traffico dalla sede A alla sede B $A_{01} = 2E$
- o traffico dalla sede A verso altre destinazioni $A_{02} = 5E$
- o traffico dalla sede B alla sede A $A_{03} = 2E$
- o traffico dalla sede B verso altre destinazioni $A_{04} = 4E$

- a) Nell'ipotesi di chiamate distribuite aleatoriamente secondo un processo di Poisson e di una durata media delle chiamate pari a 2 min., si chiede di calcolare il numero di linee di interconnessione con la rete pubblica, M_A ed M_B , che si devono attivare nelle due sedi al fine di garantire una probabilità di rifiuto delle chiamate (di qualunque tipo) $P_r \leq 1\%$.
- b) Nell'ipotesi di un periodo lavorativo pari a 24 giorni mensile per 8 ore giornaliere e di tariffazione delle chiamate a tempo con un costo medio stimato di 3.5 Lire/sec per le chiamate verso l'esterno e di 1.5 Lire/sec per le chiamate fra le due sedi, si chiede di calcolare il costo totale annuo C_a del traffico telefonico.

Infine si chiede di valutare l'opportunità di collegare i due centralini aziendali con circuiti dedicati (ogni circuito trasporta una chiamata telefonica). Si chiede di calcolare:

- c) il numero di linee di interconnessione con la rete pubblica, m_A ed m_B , che si devono attivare nelle due sedi ed il numero di circuiti dedicati m_{AB} , necessari per garantire 1%;
- d) quale dovrebbe essere il prezzo di noleggio c_0 di un circuito dedicato, al fine di rendere questa soluzione conveniente dal punto di vista economico (per questo calcolo si trascuri il costo delle linee di interconnessione alla rete pubblica)

Esercizio 47

Un'azienda ha una piccola sede dotata di un centralino collegato alla rete pubblica mediante un accesso base ISDN (2 canali B a 64 Kbit/s + un canale di segnalazione). Nella sede sono presenti, oltre ai telefoni normali, terminali per videotelefonia, che per ogni chiamata richiedono due canali

B, uno per il segnale audio ed uno per il segnale video. Il centralino si comporta come un sistema con perdita: la telefonata normale viene servita se almeno uno dei canali B è libero, la videotelefonata è servita se ambedue i canali B sono liberi, altrimenti le chiamate vengono cancellate. Si supponga che i processi degli arrivi delle telefonate e delle videotelefonate siano esponenziali con ritmi $\lambda_t = 10$ chiamate/ora e $\lambda_v = 5$ chiamate/ora, rispettivamente; le durate siano distribuite esponenzialmente con durate medie $\theta_m = 3$ minuti per ambedue i tipi di traffico.

1. Rappresentare il sistema sopra descritto mediante catena di Markov
2. Calcolare le probabilità di stato all'equilibrio
3. Calcolare la probabilità di perdita Π_t per le telefonate
4. Calcolare la probabilità di perdita Π_v per le videotelefonate
5. Calcolare il traffico totale offerto al centralino A_{tot} ed il traffico totale smaltito A_{st} .

Esercizio 48

Un nuovo operatore di telefonia pubblica deve pianificare il dimensionamento del call center tramite il quale fornire assistenza ai nuovi clienti ed agli abbonati. In prima istanza si propone di fornire informazioni tramite operatore, con un normale sistema a perdita (privo della possibilità di porre in attesa le chiamate). Si ipotizza di dover soddisfare nell'ora di punta, alla partenza del servizio, $\lambda_0 = 80$ ch./ora, di avere chiamate con distribuzione esponenziale e valor medio $\bar{\vartheta} = 3$ min e di avere una crescita del traffico del 100 % all'anno. Si vuole pianificare il numero di operatori necessari al fine di garantire una probabilità di perdita delle chiamate inferiore a 1% per un periodo biennale. Per semplicità di gestione si prevede di assumere nuovi operatori con cadenza semestrale e quindi, a valle dell'assegnazione iniziale di personale, sono previsti 3 interventi dopo 6, 12 e 18 mesi. Si richiede di:

- calcolare il numero di operatori necessari alla partenza del servizio;
- calcolare il piano di aggiornamento del servizio, indicando il numero di nuovi operatori da assumere, secondo le modalità suddette.

Al termine del secondo anno si prevede l'introduzione di un sistema di risposta automatico capace di gestire l'aacodamento delle chiamate qualora non vi siano operatori disponibili e fornire alcune informazioni di base. Grazie a questa seconda funzione si prevede un decremento delle richieste di colloquio con gli operatori pari al 30% del totale. Si calcoli fino a quando il numero di operatori presenti sarà sufficiente per garantire un tempo di attesa in coda, per gli utenti messi in coda, inferiore a 3 minuti con probabilità superiore al 90%.

Esercizio 49

Un'azienda si compone di due sedi geograficamente distinte. Ciascuna sede è dotata di numerosi calcolatori collegati in rete locale e le due reti sono interconnesse in ambito geografico tramite due router (uno per sede) ed un collegamento dedicato di capacità $C=2.048$ Mbit/s. Si ipotizzi che fra le reti locali vengano scambiati, in ciascuna direzione, $\lambda=400$ pacc./s con arrivi distribuiti secondo un processo di Poisson. Inoltre si ipotizzino i pacchetti di lunghezza aleatoria con distribuzione esponenziale e valor medio $D=512$ byte. In prima approssimazione, si supponga poi che le code di trasmissione nei router siano di lunghezza infinita.

Si devono analizzare le prestazioni relative ad un particolare tipo di transazione amministrativa. Ciascuna transazione si compone dell'invio di un pacchetto dalla rete A alla rete B e di una conferma di ricezione inviata dalla rete B alla rete A. Il pacchetto di informazione è di lunghezza fissa sempre uguale a $D_M=1536$ byte mentre la risposta è sempre lunga $D_m=64$ byte. I datagrammi delle singole transazioni fanno parte del normale flusso di dati fra le reti locali e la loro percentuale è sufficientemente piccola da influenzare significativamente la distribuzione complessiva della lunghezza dei pacchetti.

Si richiede di calcolare:

1. il tempo medio necessario ad un **generico pacchetto** per essere trasmesso da una rete all'altra;
2. il tempo medio necessario a trasmettere un **pacchetto dati** della transazione in analisi;
3. il tempo medio necessario a trasmettere un **pacchetto di conferma** della transazione in analisi;
4. scrivere nei tre casi le densità di probabilità $\delta(t)$, $\delta_M(t)$ e $\delta_m(t)$ del tempo totale trascorso nel sistema e determinare le probabilità che tale tempo sia superiore a 5 msec.

Esercizio 50

Come noto il protocollo TCP utilizza un controllo di flusso a finestra scorrevole. Il dimensionamento della finestra e dei time out di ritrasmissione per una connessione TCP sono funzione del cosiddetto "round trip delay" (RTT), somma del tempo necessario ad un datagramma per raggiungere la destinazione e al relativo acknowledge per ritornare alla sorgente. Si ipotizzi di considerare una connessione TCP che invia segmenti di lunghezza fissa pari $D_M=1024$ e acknowledge di lunghezza $D_m=64$ byte, attiva fra due host collegati a due reti locali interconnesse. L'interconnessione è realizzata tramite due router ed un collegamento dedicato di capacità $C=2.048$ Mbit/s e lunghezza pari a 100 km. A causa della presenza di altri host e di altre connessioni TCP, fra le due LAN vengono scambiati, in ciascuna direzione, $\lambda=400$ pac./s con arrivi distribuiti secondo un processo di Poisson e lunghezza aleatoria con distribuzione esponenziale e valor medio $D=512$ byte. In prima approssimazione, si supponga poi che le code di trasmissione nei router siano di lunghezza infinita.

Tenendo conto che RTT si compone di una parte deterministica, legata ai tempi di trasmissione dei pacchetti ed al ritardo di propagazione, e di una parte aleatoria, dovuta al tempo di attesa nelle code di trasmissione dei router, si richiede di calcolare:

1. calcolare la componente deterministica T_D di RTT;
2. la durata media complessiva T_T di RTT;
3. la distribuzione di probabilità $F_A(t)$ della componente aleatoria di RTT;
4. la probabilità che RTT sia maggiore di 10 msec;
5. la dimensione del time out T_{out} tale che la probabilità di scadenza a causa di un RTT elevato sia inferiore al 5%.

Nota: per la soluzione si tengano presenti le seguenti formule:

$$\int x^n e^{-\mu x} dx = e^{-\mu x} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!} \frac{x^{n-i}}{(-\mu)^{i+1}} + C$$

$$\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$$

Esercizio 51

Si consideri un ufficio con N dipendenti e un centralino telefonico connesso alla rete pubblica tramite un fascio di m linee, che si comporta come un sistema di code a chiamate bloccate cancellate. Si supponga che, per il tipo di lavoro fatto, il traffico generato sia esclusivamente uscente, schematizzabile nel modo seguente: quando il dipendente è libero genera una chiamata telefonica dopo un tempo aleatorio con distribuzione esponenziale negativa di parametro $\lambda_u = 20$ chiamate/ora, e con durata ancora esponenziale negativa di parametro $\mu = 20$ chiamate/ora.

- 1) Si supponga dapprima $N = 1$ e $m = 1$ e si calcolino:
 - a. Le probabilità di stato del sistema P_k
 - b. Il traffico *effettivamente* offerto al sistema A_e , il traffico smaltito A_s ed il traffico perduto A_p
 - c. La *time congestion* Π_B (probabilità che il sistema si trovi nello stato bloccato) e la *call congestion* Π_P (probabilità che una chiamata venga rifiutata)
- 2) Si supponga ora $N = 5$ e $m = 5$ e si calcolino ancora:
 - a. Le probabilità di stato del sistema P_k

- b. Il traffico *effettivamente* offerto al sistema A_e , il traffico smaltito A_s ed il traffico perduto A_p
- c. La *time congestion* Π_B (probabilità che il sistema si trovi nello stato bloccato) e la *call congestion* Π_P (probabilità che una chiamata venga rifiutata)

Esercizio 52

Consideriamo un sistema di code costituito da uno sportello che fornisce informazioni agli utenti. Supponiamo che gli utenti si presentino allo sportello seguendo un processo di Poisson con parametro $\lambda = 120$ persone/ora, ma che se trovano altri utenti in coda si scoraggino e rinuncino a mettersi in attesa, con probabilità tanto maggiore quanto maggiore è la lunghezza della coda. In conclusione supponiamo che gli utenti che effettivamente si mettono in coda possano essere modellati con il seguente ritmo degli arrivi:

$$\lambda_0 = \lambda$$

$$\lambda_k = \lambda/k \quad \text{per } k \geq 1$$

(k rappresenta ovviamente il numero di utenti nel sistema).

Supponiamo poi che processo dei servizi segua una distribuzione di probabilità esponenziale negativa con valore medio $\theta_m = 1$ minuto. Calcolare

- a) le probabilità di stato all'equilibrio P_k del sistema
- b) il traffico A_0 effettivamente offerto al sistema, il traffico smaltito A_S ed il traffico perduto A_p
- c) il numero medio di utenti nel sistema k_m
- d) il tempo di attesa medio per un utente che arriva e decide di mettersi comunque in coda.

Esercizio 53

Si deve progettare la rete d'interconnessione di un'azienda, che si compone di due sedi, A e B. Le esigenze di comunicazione fra le sedi sono di tipo voce e dati. In particolare si prevede un traffico vocale bidirezionale pari a 4 Erlang da A a B e 4 Erlang da B ad A, ed un traffico dati pari, in media a 200 Kbit/s. Poiché le reti aziendali utilizzano TCP/IP i dati vengono inviati sotto forma di datagrammi aventi distribuzione esponenziale con valore medio pari a $D=500$ byte e frequenza media di arrivo pari a $\lambda_D=25$ pac/sec (si supponga di Poisson il processo degli arrivi) da A a B e altrettanto da B ad A. Per il traffico si richiede che il tempo medio di trasferimento (comprensivo del tempo di trasmissione più eventuale attesa in coda) sia inferiore a 10 msec.

Il gestore offre in affitto circuiti dedicati numerici (CDN) con capacità multipla di $C_0=64$ Kbit/s full duplex. Si calcoli il numero complessivo di CDN necessari per realizzare la rete nelle seguenti ipotesi.

1. Il traffico voce sia trasportato su linee separate dai dati con modalità a circuito, utilizzando dei compressori vocali tali che siano richiesti 16 Kbit/s per chiamata (4 chiamate per CDN). La probabilità di blocco per chiamata vocale sia inferiore a $\pi_p=1\%$.
2. Il traffico voce sia trasportato su linee separate dai dati con modalità a pacchetto (Voice over IP). In questo caso si ipotizzi che il traffico vocale sia modellabile con un processo di Poisson avente frequenza media di arrivo dei pacchetti pari a $\lambda_v=30$ pac./sec. per chiamata e che i pacchetti abbiano lunghezza esponenziale con valore medio $D_v = 50$ byte. In questo caso si richiede che la probabilità di attendere più di 20 msec, condizionata al fatto di sperimentare attesa, sia inferiore al 5%.
3. Il traffico voce sia trasportato con modalità a pacchetto (Voice over IP) insieme al traffico dati, ferme restando i profili di traffico e le specifiche di qualità di cui ai punti precedenti.

Esercizio 54

Un'azienda si compone di due sedi entrambe dotate di centralini per lo smistamento delle chiamate interne alle sedi, fra loro interconnessi per permettere telefonate fra le due sedi. L'interconnessione è realizzata tramite $m=4$ circuiti telefonici dedicati, noleggiati dal gestore. Il traffico fra le due sedi si può classificare secondo due tipologie:

- traffico di tipo A con frequenza media di arrivo delle chiamate pari a 4 ch/h e durata media delle chiamate pari a 3 minuti;
- traffico di tipo B con frequenza media di arrivo delle chiamate pari a 16 ch/h e durata media delle chiamate pari a 3 minuti.

Il traffico di tipo A ha una maggiore importanza e deve quindi essere trattato con maggiore priorità rispetto a quello di tipo B, cosa che si può realizzare operando una politica di "trunk reservation" come segue:

- finché il numero di circuiti occupati (uguale al numero di chiamate in corso fra le due sedi) è inferiore a N (da decidersi) si accettano chiamate di tipo A e di tipo B,
- quando il numero di circuiti occupati è uguale o superiore ad N si accettano solamente chiamate di tipo A.

1) Calcolare la probabilità di blocco qualora i due tipi di traffici siano trattati in maniera indifferenziata dai centralini. (punti 2)

2) Disegnare il diagramma a stati rappresentativo del sistema con "trunk reservation" per N e m generici. (punti 3)

3) Ricavare l'espressione delle probabilità di stato, relative al diagramma di cui al punto precedente, in funzione di P_0 per N e m qualunque. (punti 3)

4) Nel caso $m=4$, trovare il valore di N per cui la probabilità di perdita per il traffico di tipo A è $\Pi_A \leq 0.001$, e calcolare la corrispondente probabilità di blocco Π_B per il traffico di tipo B (punti 5).

Esercizio 55

Un'azienda deve collegare fra loro i centralini di due sedi distaccate. Misure di traffico effettuate sulla rete aziendale hanno evidenziato una durata media delle chiamate pari a 150 sec. Il collegamento viene realizzato per mezzo di una linea ISDN con accesso base (due canali B a 64 Kbit/s). Si vuole decidere quale sia la scelta più conveniente fra le due seguenti:

- dotare i centralini di apparati per la compressione vocale a 16 Kbit/s, in grado di allocare fino a 7 conversazioni contemporanee (in modalità a circuito), più un canale di segnalazione, sui due canali B;
- utilizzare due router interfacciati con i centralini ed equipaggiati per il supporto di Voice over IP (VoIP).

Nel caso di VoIP il traffico viene trasportato con modalità a pacchetto. Si ipotizzi che il traffico vocale *in uscita da ciascun terminale d'utente* sia rappresentabile con un processo di Poisson avente frequenza media di arrivo dei pacchetti pari a $\lambda_V=30$ pacc./sec. e che i pacchetti abbiano lunghezza esponenziale con valore medio $D_V = 50$ byte.

Determinare:

1. il traffico sostenibile nel primo caso garantendo una probabilità di perdita per chiamata inferiore a 1%;
2. il numero di chiamate contemporanee che sono accettabili nel caso di VoIP al fine di garantire che la probabilità per un pacchetto di attendere più di 20 msec, condizionata al fatto di sperimentare attesa, sia inferiore al 5%, tenendo presente che il traffico risultante dall'insieme delle chiamate telefoniche attive viene trasmesso sui canali B ISDN da considerarsi equivalenti ad un'unica linea di trasmissione a 128 Kbit/s;
3. il traffico sostenibile nel caso di VoIP garantendo una probabilità di perdita per chiamata inferiore a 1%, nell'ipotesi in cui i router limitino le chiamate telefoniche contemporaneamente attive ad un valore massimo uguale a quello calcolato al punto 2.

Esercizio 56

L'interfaccia di uscita di un router è collegata a due linee in parallelo. La prima viene denominata linea A, di capacità $C_A=256$ Kbit/s, e la seconda linea B, di capacità $C_B=64$ Kbit/s. Per la gestione dell'accesso alle linee l'interfaccia è dotata di una coda la cui capacità è limitata a $L=2$ pacchetti al fine di minimizzare i ritardi in coda. L'interfaccia è stata configurata in modo tale che:

1. quando un nuovo pacchetto arriva ed entrambe le linee sono libere, esso viene *sempre* inviato alla linea più veloce;
2. quando un pacchetto arriva ed una delle linee è impegnata, esso viene inviato all'altra;
3. quando un pacchetto arriva ed entrambe le linee sono impegnate, viene accodato oppure scartato qualora la coda sia piena.

Si ipotizzi che i pacchetti abbiano lunghezza aleatoria con distribuzione esponenziale e valor medio pari a $D=500$ byte e che arrivino all'interfaccia secondo un processo di Poisson con frequenza media di arrivo pari a $\lambda=64$ p/s.

Si chiede di:

1. disegnare il diagramma a stati rappresentativo del sistema a coda considerato e determinare le frequenze di transizione fra gli stati; (punti 4)
2. calcolare le probabilità di stato; (punti 6)
3. calcolare la probabilità di blocco (ossia di dover attendere in coda) e di perdita per pacchetto. (punti 3)

Esercizio 57

Un'azienda si compone di due stabilimenti dotati entrambi di centralino. I due centralini sono collegati fra loro tramite $m=2$ linee dedicate. Il traffico totale fra i due stabilimenti è di tipo Poissoniano ed è stimato complessivamente in $\lambda_T=20$ ch/ora e la durata media delle chiamate è aleatoria con distribuzione esponenziale e valor medio 3 min.

Si richiede innanzitutto di calcolare la probabilità di blocco nell'ipotesi di sistema a chiamate bloccate cancellate. (punti 2)

Il traffico si compone in realtà di due flussi, di cui uno di priorità più bassa avente frequenza media delle chiamate pari a $\lambda_1=15$ ch/ora ed uno a maggiore priorità avente frequenza media delle chiamate pari a $\lambda_2=5$ ch/ora. Modificando il software dei centralini è possibile gestire il traffico prioritario in modo differenziato: le chiamate prioritarie che trovino le due linee occupate vengono accodate (si ipotizzi la coda di lunghezza infinita) e servite quando una linea si libera, le chiamate non prioritarie vengono invece trattate come nel caso precedente (quindi perdute).

Si chiede di:

1. disegnare il diagramma a stati della catena di Markov che descrive questo caso; (punti 3)
2. calcolare le relative probabilità di stato P_k ; (punti 3)
3. calcolare la probabilità π_2 di blocco (accodamento) delle chiamate prioritarie e π_1 di blocco (perdita) delle chiamate non prioritarie; (punti 2)
4. calcolare il traffico smaltito da questo sistema con e senza gestione della priorità. (punti 3)

Esercizio 58

Nel centro di una grande città si trova un posteggio di taxi. I clienti che arrivano se trovano un taxi in attesa vengono immediatamente caricati, altrimenti formano una coda ordinata, servita con politica FIFO. I taxi liberi girano per le strade e, quando passano davanti al parcheggio, se vedono un cliente in attesa lo caricano immediatamente, altrimenti si fermano formando una coda ordinata.

Si facciano le seguenti ipotesi:

- nel periodo di punta il sistema raggiunge una condizione di equilibrio statistico;
- l'arrivo dei clienti è rappresentabile mediante un processo di Poisson con ritmo $\lambda_c = 1$ cliente/minuto

- il passaggio dei taxi davanti al posteggio segue ancora un processo di Poisson con tempo interarrivo $\tau_t = 48$ secondi. Il posteggio ha posto solo per $N = 4$ taxi.

1) Si rappresenti il sistema mediante una catena di Markov, e se ne disegni il diagramma a stati, denominando i suoi stati:

- C_1, C_2, C_3 , ecc., stati in cui sono presenti rispettivamente 1, 2, 3, ecc., clienti,
- 00 stato in cui non ci sono né taxi né clienti in attesa,
- T_1, T_2, T_3 , ecc., stato in cui sono presenti rispettivamente 1, 2, 3, ecc., taxi. (2 punti)

2) Si calcolino le probabilità di stato all'equilibrio $P_{T_1}, P_{T_2}, \dots, P_{00}, P_{C_1}, P_{C_2}, \dots$ (3 punti)

3) Si calcoli la probabilità di attesa Π_c per i clienti (prob. di arrivare al posteggio e dovere attendere un taxi) ed il tempo medio di attesa ϵ_c , limitatamente ai clienti che sperimentano attesa. (3 punti)

4) Per i taxi si calcolino la probabilità di rifiuto Π_R (prob. di arrivare al posteggio e trovarlo già tutto occupato), la probabilità di sosta Π_t (prob. di arrivare al posteggio, trovare posto ma dovere attendere un cliente) ed il tempo medio di sosta ϵ_t , limitatamente ai taxi che fanno sosta. (4 punti)

Esercizio 59

Un router collega la rete locale di una azienda ad Internet, attraverso una linea di capacità $C = 2,048$ Mbit/s. Il traffico prodotto nell'azienda viene diviso in due classi: la prima (classe A) comprende il traffico di tipo amministrativo considerato ad alta priorità; la seconda (classe B) comprende il resto del traffico, tipicamente di tipo *best-effort*, ritenuto a bassa priorità. Per smaltire i suddetti traffici il Router mantiene due code distinte, gestite con politica FIFO, e attribuisce priorità alla coda A, nel senso che i pacchetti della coda B accedono alla linea solo quando la coda A è vuota. Comunque un pacchetto di tipo A non interrompe uno di tipo B se questo ha già cominciato la trasmissione. I pacchetti hanno *tutti* lunghezza con distribuzione esponenziale negativa e valor medio $D = 512$ byte. Il processo degli arrivi dei pacchetti A è di tipo poissoniano con frequenza $\lambda_A = 150$ pacch./sec. Supponiamo ora che per un lungo periodo di tempo il traffico di tipo B sia tale da superare la capacità della linea. In tali condizioni si può ritenere che la coda B non sia mai vuota di pacchetti. Si vuole determinare la qualità del servizio offerto ai pacchetti di tipo A. A tal fine si chiede di studiare il sistema a coda formato dal servitore (la linea di trasmissione) e dalla coda A.

1. Disegnare il diagramma degli stati del suddetto sistema e calcolare le probabilità di stato all'equilibrio (3 punti)

Riferendosi poi soltanto ai pacchetti di tipo A, calcolare

2. La probabilità di perdita Π_P e quella di blocco Π_R (1 punto)
3. Il tempo medio di attesa in coda $\bar{\eta}$ e quello di permanenza nel sistema $\bar{\delta}$ (3 punti)
4. La densità di probabilità $f_{\eta}(t)$ del tempo di attesa in coda e la probabilità P di aspettare in coda più di 5 msec (3 punti)
5. La densità di probabilità $f_{\delta}(t)$ del tempo di permanenza nel sistema (3 punti)

Esercizio 60

Dimensionamento di un Call Center.

Una grande azienda fornisce informazioni ai clienti attraverso un Call Center. I clienti che telefonano vengono messi in contatto con un risponditore automatico, che per prima cosa presenta un menù con diverse scelte. In virtù di queste il cliente può navigare attraverso vari sottomenu con messaggi registrati oppure chiedere l'intervento di un operatore umano; in questo caso accede ad un sistema di code con politica FIFO, dove attende il primo operatore libero. In base alle statistiche sugli utenti si possono fare le seguenti assunzioni. Il processo degli arrivi è di Poisson con parametro $\lambda = 10$ chiamate al minuto; il tempo speso nel primo menu è per tutti i clienti pari a $T_m = 50$ sec.; una frazione pari a $p_a = 60\%$ dei clienti è soddisfatta dalle risposte automatiche, e spende nei vari sottomenù un tempo aleatorio con distribuzione esponenziale negativa di valor

medio $\theta_a = 100$ secondi; gli altri dopo l'eventuale attesa in coda hanno una conversazione con l'operatore umano, ancora con distribuzione esponenziale negativa di valor medio $\theta_u = 150$ sec.

1. Calcolare il tempo medio T_a speso complessivamente nel call center dai clienti che non richiedono il colloquio con l'operatore umano e la relativa densità di probabilità $f_{T_a}(t)$. (3 punti)
2. Dimensionare il numero di operatori umani m_u necessari affinché un tempo di attesa in coda per chi finisce in coda pari a $\varepsilon = 100$ sec. sia superato con probabilità $P_s \leq 0.05$. (3 punti)
3. Con il valore di m_u calcolato al punto 2, calcolare il valor medio θ_M del tempo totale speso nel call center dal generico utente e dimensionare il numero di linee m_L verso la rete telefonica in modo tale che la probabilità di perdita per le chiamate entranti sia $\Pi_p \leq 0.01$. (4 punti)
4. Nel procedimento suggerito sono implicite delle approssimazioni: individuare quali sono e discutere se portano o no ad un dimensionamento conservativo del call center (3 punti).

Esercizio 61

Su una strada di grande traffico, in un quartiere affari di una grande città, si trova un posteggio di taxi. L'arrivo dei clienti è rappresentabile mediante un processo di Poisson con ritmo $\lambda_c = 1$ cliente/minuto; i clienti arrivati se trovano un taxi in attesa vengono immediatamente caricati, altrimenti formano una coda ordinata, servita con politica FIFO.

I taxi liberi girano per le strade ed i loro passaggi davanti al posteggio seguono ancora un processo di Poisson; ad ogni passaggio se vedono un cliente in attesa lo caricano immediatamente, altrimenti possono decidere di fermarsi formando una coda ordinata; la decisione di fermarsi o meno è influenzata dal numero di taxi già in coda di attesa. Supponiamo di poter schematizzare questo comportamento assumendo che il ritmo di entrata in coda dei taxi sia $\lambda_t = 1.5/(k_t+1)$, dove k_t rappresenta il numero di taxi in coda. Lo spazio per parcheggiare è molto grande e non si vede un limite definito per il numero di taxi in coda.

1) Si rappresenti il sistema mediante una catena di Markov, e se ne disegni il diagramma a stati, denominando i suoi stati:

- C_1, C_2, C_3, \dots , stati in cui sono presenti rispettivamente 1, 2, 3, ecc.. clienti,
- 00 stato in cui non ci sono né taxi né clienti in attesa,
- T_1, T_2, T_3, \dots , stato in cui sono presenti rispettivamente 1, 2, 3, ecc.. taxi. (3 punti)

2) Si calcolino le probabilità di stato all'equilibrio $P_{T_1}, P_{T_2}, \dots, P_{00}, P_{C_1}, P_{C_2}, \dots$. (A tal fine si suggerisce di esprimere tutte le probabilità in funzione di P_{00} .) (3 punti)

3) Si calcoli la probabilità di attesa Π_c per i clienti (prob. di arrivare al posteggio e dovere attendere un taxi) ed il tempo medio di attesa ε_c , limitatamente ai clienti che sperimentano attesa. (3 punti)

4) Per i taxi si calcolino la probabilità di attesa Π_t (prob. di arrivare al posteggio e dovere attendere un cliente) ed il numero medio di taxi in coda. (3 punti)

Esercizio 62

Analisi di un piccolo Call Center.

Un piccolo call center fornisce servizi agli utenti mediante $m = 2$ operatori raggiungibili attraverso un centralino. Il centralino è collegato con la rete telefonica mediante $N_L = 4$ linee esterne. Gli utenti chiamanti si impossessano di una linea esterna e se gli operatori sono ambedue occupati vengono invitati ad attendere mediante un messaggio di cortesia; la disciplina di coda è di tipo FIFO.

Si supponga il processo delle chiamate Poissoniano con ritmo degli arrivi $\lambda = 2$ chiamate/minuto, e la distribuzione del tempo di servizio esponenziale negativa con valor medio $\theta_m = 1$ minuto.

1. si rappresenti il sistema mediante una catena di Markov e si calcolino le probabilità di stato all'equilibrio (4 punti)

Si calcolino poi:

2. la probabilità di perdita o di rifiuto Π_R del sistema (2 punti)
3. la probabilità di finire in coda per un utente (incondizionata) (2 punti)
4. il tempo medio di attesa in coda ε_m condizionato al fare coda (2punti)
5. il tempo medio speso nel sistema δ_m da un utente che è stato accettato (2 punti).

Esercizio 63

Un gestore deve pianificare il numero di giunzioni (circuiti) d'interconnessione di una centrale di quartiere con il resto della rete. La pianificazione va fatta per un periodo di 5 anni, tenendo conto delle variazioni del traffico su tale periodo. Il traffico si compone di chiamate telefoniche vocali e di chiamate ad Internet Service Provider, per l'interconnessione ad Internet. Attualmente si misura un traffico telefonico di picco pari a 100E ed un traffico di picco verso gli ISP pari a 10E. Per il primo si prevede una crescita esponenziale con un incremento annuo del 5%, mentre per il secondo una crescita sempre esponenziale con un incremento annuo del 100%. Per ragioni di opportunità il gestore intende utilizzare per l'interconnessione della centrale con il resto della rete dei collegamenti PCM a 2 Mbit/s capaci di 30 canali telefonici.

Si richiede di:

1. scrivere le espressioni che permettono di calcolare l'ammontare di traffico telefonico $A_{0t}(t)$, di traffico d'interconnessione a Internet $A_{0i}(t)$ e di traffico totale $A_0(t)$ per un qualunque istante di tempo del periodo di riferimento a partire da quello attuale (punti);
2. disegnare l'andamento di $A_0(t)$ nel grafico allegato sul retro, calcolando una serie di valori campione;
3. pianificare il numero di giunzioni da installare nel tempo per garantire una probabilità di perdita per chiamata inferiore a 1% per tutto il periodo di riferimento (si ipotizzi che gli interventi, se necessari, possano avvenire soltanto ad inizio o a metà anno).

Misure più accurate permettono di appurare che il traffico telefonico e quello di interconnessione ad Internet raggiungono i valori di punta in periodi diversi della giornata. In prima approssimazione si può dire che quando è massimo il traffico telefonico, circa alle ore 11, il traffico verso Internet è dimezzato rispetto al suo valore di punta, che si verifica intorno alle 21, e viceversa. Si chiede di

- ripetere le valutazioni del punto 1 e 2 riferendosi alle ore 11 e alle ore 21;
- ripetere la pianificazione con queste nuove ipotesi.

Esercizio 64

Si consideri un sistema telefonico cellulare GSM in cui ciascuna cella sia servita da una stazione base con 3 portanti radio, capaci di 8 canali telefonici ciascuna, per un totale di $m=24$ canali. In ciascuna cella siano presenti nell'ora di punta N utenti che generano, secondo un processo di Poisson, $\lambda_u=3$ chiamate per ora in media, aventi durata media pari a $\theta = 1/\mu = 2$ minuti.

Ipotizzando di poter trascurare la mobilità degli utenti, si calcoli:

1. il massimo valore di N tale da garantire una probabilità di blocco per chiamata $\pi_p \leq 1\%$. (punti 3)

Poiché gli utenti possono muoversi da cella a cella, il sistema deve prevedere la possibilità di trasferire una chiamata da una cella ad un'altra. Quindi in una cella le nuove chiamate possono essere generate da utenti già presenti nella cella che decidono di telefonare, sia da utenti che richiedono un handover. Allo stesso modo le chiamate possono terminare perché l'utente riaggancia sia perché lascia la cella. Nell'ipotesi di distribuzione uniforme degli utenti e di sostanziale equivalenza fra le celle, si può considerare costante e pari ad N il numero di utente mediamente presenti nella cella e nuovamente uguale ad N il numero medio di utenti in celle confinanti con quella considerata e potenzialmente diretti verso di essa. Si ipotizzi poi che ciascun utente cambi cella secondo un processo di Poisson con frequenza $\lambda_h=2$ cambi per ora.

Si richiede di:

2. disegnare il diagramma a stati della catena di Markov per la cella considerata; (punti 2)

3. esprimere in funzione di N la frequenza totale λ_T di arrivo delle chiamate e la frequenza di morte μ_T delle chiamate nella cella considerata, nonché il traffico offerto A_0 per cella considerando il movimento degli utenti; (punti 3)
4. calcolare il numero massimo di utenti accettabili per cella al fine di avere una probabilità di blocco per chiamata inferiore a 1%. (punti 2)

A causa di particolari eventi può poi accadere che il movimento degli utenti non sia uniforme ma vi sia una concentrazione verso una particolare cella. Supponiamo che questo crei una concentrazione di utenti che porti ad un aumento di N del 50%. Si calcoli:

5. il numero di canali che sarebbe necessario prevedere per mantenere la qualità di servizio a fronte di tale aumento, tenendo conto che la capacità si può aumentare in termini di portanti radio e non di singoli canali. (punti 3)

Esercizio 65

L'interfaccia di uscita di un router IP è equipaggiata con una linea di trasmissione di capacità $C=2.048$ Mbit/s. All'interfaccia giungono datagrammi classificabili secondo due tipologie di servizio: real time e best effort. Il traffico real time ha stringenti requisiti in termini di ritardo di trasmissione, mentre il traffico best effort non ha particolari requisiti di servizio.

Si ipotizzi una condizione in cui il traffico offerto di tipo best effort sia molto elevato e venga accodato in una memoria capace di molti pacchetti, che per tutto il periodo di interesse rimane sempre piena, in modo tale che, appena la linea di trasmissione si libera, viene occupata da un datagramma di tipo best effort. La lunghezza dei datagrammi best effort si assume esponenziale con valor medio pari a $\theta_b=512$ byte.

I datagrammi di tipo real time vengono accodati separatamente in una memoria capace di contenere un solo datagramma alla volta. Questi datagrammi arrivano secondo un processo di Poisson con valor medio pari a $\lambda=400$ pacc/s e la loro lunghezza si assume esponenziale con valor medio pari a $\theta_r=128$ byte.

Sono possibili due modalità di funzionamento:

- nella prima il pacchetto real time attende comunque che sia terminata la trasmissione del pacchetto best effort in servizio (modalità *non pre-emptive*);
- nella seconda all'arrivo di un datagramma real time viene interrotta la trasmissione del datagramma best effort in servizio, che viene perciò perduto (modalità *pre-emptive*).

Nell'ipotesi in cui l'interfaccia funzioni con modalità *non pre-emptive* si richiede di:

- disegnare la catena di Markov rappresentante il comportamento del sistema a coda; (punti 3)
- calcolare la probabilità di perdita per i pacchetti real time ed il relativo traffico smaltito (punti 2).

Si ripetano tali calcoli nel caso *pre-emptive*. (punti 5+3)

SUGGERIMENTO: per la definizione delle catene di Markov si nomini stato 0, lo stato in cui la linea trasmette un pacchetto best effort e ci si limiti a considerare il numero di datagrammi real time presenti nel sistema.

Esercizio 66

Si consideri la porta di uscita di un router, interfacciata ad una linea di trasmissione avente velocità $C = 128$ Kbit/s. All'interfaccia giungono pacchetti con frequenza media di arrivi $\lambda = 50$ pacch./s e distribuzione di Poisson, aventi lunghezza casuale esponenziale con lunghezza pari a $L = 512$ byte. Per regolare l'accesso alla linea di trasmissione, qualora vi siano più arrivi contemporanei, è presente una memoria capace di contenere fino a 5 pacchetti. Si richiede di:

1. ricavare la formula per il calcolo della probabilità di perdere un pacchetto e determinarne il valore; (punti 3)
2. calcolare il tempo medio di attesa in coda per i pacchetti; (punti 4)

3. calcolare il tempo medio di attesa in coda condizionato al fatto di dovere attendere in coda; (punti 3)
4. determinare quale dovrebbe essere la dimensione della coda per garantire una probabilità di perdita inferiore all'1%. (punti 3)

Esercizio 67

Un'azienda di grandi dimensioni è dotata di un moderno centralino telefonico, collegato alla rete telefonica mediante un numero di linee "molto elevato".

I dipendenti generano un intenso traffico verso l'esterno e nel centralino sono divisi in due classi:

- la classe B a Bassa priorità, che "vede" un servizio a chiamate bloccate cancellate: se al momento in cui si genera una chiamata esiste una linea libera viene occupata, altrimenti la chiamata va perduta; il processo degli arrivi per questa classe è Poissoniano con ritmo $\lambda_B=50$ ch/ora
- la classe A ad Alta priorità, che vede un servizio a chiamate bloccate ritardate: questi competono per le linee libere con quelli dell'altra classe, ma in caso di blocco per essi viene creata una coda una coda FIFO con un numero illimitato di posti; anche per questa classe il processo degli arrivi è Poissoniano con ritmo $\lambda_A=10$ ch/ora

Il sistema raggiunge una condizione di equilibrio statistico in cui hanno elevata probabilità gli stati con tutte le linee occupate o con poche linee libere. In questa condizione supponiamo lecita la seguente approssimazione: le linee si liberano seguendo un processo ancora Poissoniano con ritmo $\lambda_L=30$ ch/ora indipendente dallo stato del sistema.

1) Rappresentare il sistema mediante una catena di Markov, e disegnarne il diagramma a stati; si consiglia di caratterizzare lo stato mediante il numero di utenti di classe A in attesa o mediante il numero di linee libere, e di denominare gli stati

- A1, A2, A3, ecc.., stati in cui sono presenti rispettivamente 1, 2, 3, ecc.. utenti in attesa,
- 00 stato in cui non ci sono né linee libere né clienti in attesa,
- L1, L2, L3, ecc.., stato in cui sono presenti rispettivamente 1, 2, 3, ecc.. linee libere. (3 punti)

2) Calcolare le probabilità di stato all'equilibrio $P_{A1}, P_{A2}, \dots, P_{00}, P_{L1}, P_{L2}, \dots$ (3 punti)

3) Calcolare le probabilità di blocco Π_A e Π_B per gli utenti delle due tipologie (2 punti)

4) Calcolare il valore limite λ_{Amax} che garantisce la stabilità del sistema a parità degli altri parametri (2 punti)

5) Calcolare il numero medio di linee libere L_M nell'ipotesi che per un tempo abbastanza lungo vada a zero il ritmo degli arrivi prioritari ($\lambda_A=0$) (3 punti)

Esercizio 68

Un'azienda di servizi fornisce informazioni ai propri utenti tramite un call center. Gli utenti sono suddivisi in una categoria detta "Premium", considerati prioritari per l'azienda, ed una normale. Si stima che il traffico sia di tipo poissoniano con distribuzione della durata delle chiamate approssimativamente esponenziale e che le chiamate Premium arrivino con una frequenza media di 5 ch/min, quelle normali con una frequenza media di 30 ch/min, tutte con durata media pari a 2 min.

Per tale ragione il call center è organizzato come segue:

- m operatori sono riservati ai clienti premium;
- n operatori servono i clienti normali e quei clienti premium che trovano occupati tutti gli operatori a loro riservati;
- qualora tutti gli operatori siano occupati le chiamate vengono poste in attesa;
- gli m operatori riservati, qualora si liberino, non prelevino utenti dalla coda di attesa.

Supponendo che il traffico complessivo offerto agli n operatori generici, composto dal traffico normale più il trabocco del traffico prioritario, si possa considerare approssimativamente di Poisson, si richiede di:

1. scrivere l'espressione della probabilità di blocco per il traffico normale; (2 punti)
2. scrivere l'espressione della probabilità di blocco per il traffico Premium; (2 punti)
3. determinare m ed n in modo tale che la probabilità di fare attesa sia pari a 5 % per i clienti Premium e 20 % per quelli normali; (3 punti)
4. valutare il tempo medio di attesa in coda per i clienti Premium e per quelli normali; (3 punti)
5. valutare, per gli utenti Premium e normali, la probabilità che un utente che va in coda attenda per più di 30 sec. (3 punti)

Esercizio 69

Una grossa azienda dislocata su più siti ha dotato ciascun sito di LAN. Le LAN sono interconnesse tramite un router ed un collegamento geografico dedicato con il router della sede centrale, realizzando una topologia a stella. Fra due piccoli siti periferici si intende utilizzare le LAN anche per il trasporto del traffico telefonico, con tecnologia "Voice over IP"; la voce viene codificata e inserita in datagrammi IP. Al momento i router della rete aziendale non sono in grado di differenziare il traffico voce da quello dati e non si prevede di includere tale funzionalità in quanto il traffico voce è molto inferiore al traffico dati convenzionale.

Si ipotizzi che:

- tutti i router abbiano interfacce dotate di memoria sufficientemente grande da poter essere considerata infinita;
- il processo di arrivo dei datagrammi in uscita da ciascuno dei due siti ed in ingresso all'interfaccia che collega il router centrale con essi si possa considerare di Poisson con ritmo $\lambda=50$ p/s;
- la lunghezza dei pacchetti dati sia esponenziale con valor medio 500 byte;
- la lunghezza dei pacchetti voce sia deterministica con valor medio 64 byte.

Inoltre, tenendo conto del loro basso numero, si assuma che la presenza dei pacchetti voce non modifichi la statistica del tempo di servizio complessivo.

Trascurando il tempo di propagazione sui collegamenti geografici e tenendo conto che, in prima approssimazione, si possono considerare indipendenti le code di uscita dei vari router a seguito della moltiplicazione del traffico, si richiede di:

- scrivere l'espressione generica del tempo medio necessario per la trasmissione da una LAN all'altra di un normale pacchetto dati; (2 punti)
- scrivere l'espressione generica del tempo medio necessario per la trasmissione da una LAN all'altra di un pacchetto voce; (2 punti)
- scrivere l'espressione della densità di probabilità del tempo di trasmissione di un pacchetto voce; (4 punti)
- dimensionare i collegamenti fra i router in modo tale che il tempo medio necessario per la trasmissione di un pacchetto voce sia inferiore a 50 ms (si tenga presente che i collegamenti geografici sono acquisibili con capacità multipla di 64 Kbit/s); (2 punti)
- calcolare la probabilità che un pacchetto voce impieghi più di 200 ms per essere trasmesso. (3 punti)

Esercizio 70

Una grande azienda intende pianificare il numero di circuiti d'interconnessione fra il centralino ISDN di un suo stabilimento e la rete telefonica pubblica. La pianificazione va fatta per un periodo di 4 anni, partendo da un traffico telefonico di picco pari a 5E. Per il primo biennio si prevede una

crescita esponenziale fino ad un valore di 10E. Al termine del secondo anno è previsto un ampliamento dello stabilimento, con relativo aumento del personale, per cui si prevede un aumento del tasso di crescita del traffico, tale da raggiungere un massimo di 30E al termine del quadriennio. Ipotizzando di sottoscrivere abbonamenti ad accessi base ISDN (2 canali B per il trasporto di due canali telefonici), si richiede di:

4. scrivere le espressioni che permettono di calcolare l'ammontare di traffico telefonico $A_0(t)$ per un qualunque istante di tempo del periodo di riferimento a partire da quello attuale;
5. rappresentare con un grafico l'andamento del traffico in funzione del tempo nei 4 anni considerati;
6. pianificare il numero di linee ISDN che è necessario prevedere nel tempo per garantire una probabilità di perdita per chiamata inferiore all'1% per tutto il periodo di riferimento, supponendo di poter effettuare eventuali interventi esclusivamente con cadenza trimestrale;
7. tenendo conto che il costo mensile del canone di abbonamento di un accesso base è di circa 30€ mentre quello di un accesso primario ISDN (30 canali B) è pari a circa 200€, ripetere la pianificazione di cui sopra effettuando scelte con l'obiettivo di minimizzare il costo complessivo.

Esercizio 71

Le reti locali di due stabilimenti remoti di un'azienda sono collegati tramite router. Si vuole pianificare, per un periodo di 3 anni, la capacità della linea di interconnessione fra i due router, che si intende noleggiare da un gestore pubblico.

Si suppone che il traffico fra le due sedi sia simmetrico e che il processo degli arrivi dei pacchetti in uscita da ciascun router si possa assumere di Poisson, con frequenza media di arrivo iniziale di $\lambda = 10$ pacch/sec, aventi lunghezza esponenziale con valor medio pari a $D=500$ byte. Si prevede una crescita esponenziale fino ad un valore di $\lambda = 100$ pacch/sec.

1. Scrivere le espressioni che permettono di calcolare il valor medio della frequenza di arrivo dei pacchetti per un qualunque istante di tempo del periodo di riferimento. (2 punti)
2. Ipotizzando di trascurare il tempo di elaborazione nelle interfacce di ingresso ai router e il tempo di propagazione, e volendo limitare il tempo medio di trasferimento dei pacchetti da una rete all'altra a $\delta=10$ msec, si pianifichi la capacità della linea di interconnessione. Si tenga conto del fatto che tale capacità deve essere multipla di 64 Kbit/s e che non appare conveniente effettuare interventi con cadenza inferiore a 6 mesi. (4 punti)

Dopo un anno dall'installazione del collegamento, l'introduzione di un nuovo programma di interlavoro determina un aumento del tasso di crescita del traffico, che ora si stima raggiungerà un valor medio $\lambda = 300$ pacch/sec al termine del triennio. Questo nuovo applicativo per funzionare correttamente richiede di anche di limitare il tempo speso in coda, per i pacchetti che devono attendere, ad un valore di $\varepsilon_0=20$ msec con probabilità superiore al $P_0=95\%$.

3. Scrivere le nuove espressioni che permettono di calcolare il valor medio della frequenza di arrivo dei pacchetti per un qualunque istante di tempo del periodo di riferimento. (2 punti)
4. Pianificare nuovamente la capacità della linea di interconnessione, tenendo conto della specifica più restrittiva fra quelle precedentemente enunciate. (5 punti)

Esercizio 72

Un'azienda fornisce informazioni ai suoi clienti tramite un centralino con 3 operatori. Il processo delle chiamate è di tipo poissoniano con frequenza degli arrivi $\lambda = 60$ chiamate/ora e durata media delle occupazioni $\theta_m = 2$ minuti. I clienti che trovano ambedue gli operatori occupati ricevono un avviso e vengono messi in attesa con l'invio di un brano musicale; i clienti in coda vengono poi serviti con una disciplina FIFO. Si supponga ora che i clienti siano disposti ad aspettare il loro turno solo per un tempo ζ , trascorso il quale riagganciano abbandonando la coda. Si assuma che, stante

l'assenza di informazioni sulla durata dell'attesa, il tempo ζ sia una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale negativa a valore medio $\zeta_a = 2$ minuti.

- e) Rappresentare il sistema come un processo di nascita e morte, disegnare il diagramma degli stati che lo rappresenta e calcolarne le probabilità di stato all'equilibrio P_k ; (4 punti)
- f) calcolare il numero medio A di utenti nel sistema e il numero medio A_c di utenti in coda; (3 punti)
- g) calcolare la probabilità di blocco π_B , (2 punti)
- h) il throughput del sistema A_s , (2 punti)
- i) la probabilità di perdita π_p per il generico utente. (2 punti)

Esercizio 73

Un'azienda è dotata di un call center per fornire informazioni ai suoi clienti. Al momento il call center è equipaggiato con un solo operatore. Il processo delle chiamate è di tipo poissoniano con frequenza degli arrivi $\lambda = 30$ chiamate/ora e durata media $\bar{\vartheta} = 2$ minuti. I clienti che trovano l'operatore occupato ricevono un avviso, sono messi in attesa con l'invio di un brano musicale e vengono poi serviti con una disciplina FIFO.

Si supponga ora che i clienti siano disposti ad aspettare il loro turno solo per un tempo ϑ_a , trascorso il quale riagganciano abbandonando la coda. Un'analisi statistica del comportamento dei clienti permette di assumere, in prima approssimazione, che il tempo ϑ_a sia una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale negativa a valore medio $\bar{\vartheta}_a = 2 \bar{\vartheta} = 4$ minuti.

- e) Rappresentare il sistema come un processo di nascita e morte, disegnare il diagramma degli stati che lo rappresenta;
- f) calcolare le probabilità di stato all'equilibrio P_k ;
- g) calcolare il throughput del sistema A_s , il traffico perduto A_p e la probabilità di perdita π_p ;
- h) qualora si osservi il sistema in un istante in cui vi siano due utenti, uno in servizio ed uno in attesa, calcolare il tempo medio $\bar{\delta}_{1/2}$ che l'utente in attesa passerà nel sistema.